**Wirtschaftswissenschaftliches Prüfungsamt**

Bachelor-Studiengang
Schliessende Statistik
Sommersemester 2011

Aufgabenstellung und Ergebnisse

**Dr. Martin Becker**

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Kleben Sie bitte **sofort** Ihr Namensschild auf obige Markierung!
- Die Klausur besteht aus insgesamt 8 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 11 + 18 + 16 + 15 + 27 + 5) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch grafikfähig und programmierbar), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen zur Normal- und $t$-Verteilung finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den Seiten 1–9 berücksichtigt. Das letzte Blatt (Tabellen zur Normal- und $t$-Verteilung) darf abgetrennt werden.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

**Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben**

| Aufgabe | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) | (f) | (g) | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| 2 | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| 3 | | | | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| 4 | | | | | ■ | ■ | ■ | |
| 5 | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| 6 | | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | ■ | ■ | |
| Σ | | | | | | | | |

## Aufgabe 1 (16 Punkte)

**Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.**
**Richtige Antworten geben +2 Punkte, falsche Antworten −1 Punkt, nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).**
**Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!**

| Nr. | Aussage | wahr | falsch |
|---|---|---|---|
| 1. | Sei $X_1, \dots, X_n$ eine einfache Stichprobe vom Umfang $n$ zu $Y$. Dann sind $X_1, \dots, X_n$ stochastisch unabhängig und die Verteilung aller $X_i$ stimmt mit der Verteilung von $Y$ überein. | ■ | □ |
| 2. | Bei der Maximum-Likelihood-Schätzung ist es unproblematisch, die logarithmierte (statt der eigentlichen) Likelihoodfunktion zu maximieren, da nur die Stelle, an der das Maximum angenommen wird, für die Schätzung wichtig ist, nicht jedoch das Maximum selbst. | ■ | □ |
| 3. | Sind für $n \in \mathbb{N}$ Schätzfunktionen $T_n$ gegeben mit $\mathrm{E}(T_n) = \lambda$, so ist die Familie von Schätzfunktionen $T_n$ effizient für $\lambda$. | □ | ■ |
| 4. | Bei einem linksseitigen Gauß-Test von $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$ kann die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art für $\mu \geq \mu_0$ durch die Gütefunktion $G(\mu)$ berechnet werden. | ■ | □ |
| 5. | Liegt die Teststatistik $T$ im kritischen Bereich eines Signifikanztests zum Signifikanzniveau $\alpha$, so gilt für den $p$-Wert $p$ zur Teststatistik $T$ die Beziehung $p > \alpha$. | □ | ■ |
| 6. | Der kritische Bereich eines Chi-Quadrat-Anpassungstests auf eine diskrete Verteilung mit $n$ Trägerpunkten ist stets $K = (0, \chi^2_{n-1;1-\alpha})$. | □ | ■ |
| 7. | Mit der Varianzanalyse kann untersucht werden, welche Ausprägungen eines Faktors einen positiven und welche einen negativen Einfluss auf den Erwartungswert einer Verteilung haben. | □ | ■ |
| 8. | Die Konstruktion von Konfidenzintervallen und Tests im einfachen linearen Regressionsmodell $$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \quad (i \in \{1, \dots, n\})$$ erfolgt unter der Annahme, dass alle $u_i$ stochastisch unabhängig und normalverteilt sind mit Erwartungswert 0 und konstanter Varianz $\sigma^2$. | ■ | □ |

**Aufgabe 2** (12 Punkte)

**Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.**
**Richtige Antworten geben +3 Punkte, falsche Antworten −1 Punkt, nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).**
**Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!**

1. Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine einfache Stichprobe vom Umfang $n$ zu $Y$ mit $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt für die Verteilung von $\sum_{i=1}^n X_i$:

   (a) $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ ☐

   (b) $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$ ■

   (c) $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ☐

   (d) $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ☐

2. Auf Grundlage zweier unabhängiger einfacher Stichproben $X_1^A, \ldots, X_{n_A}^A$ vom Umfang $n_A$ zu $Y^A$ und $X_1^B, \ldots, X_{n_B}^B$ vom Umfang $n_B$ zu $Y^B$ soll unter der Annahme, dass $Y^A$ und $Y^B$ jeweils mit unbekannten Erwartungswerten normalverteilt sind, mit einem Signifikanztest überprüft werden, ob $\mathrm{Var}(Y^A) = \mathrm{Var}(Y^B)$ gilt. Zur Untersuchung dieser Fragestellung ist das folgende aus der Vorlesung bekannte Verfahren geeignet:

   (a) Einfache Varianzanalyse ☐

   (b) $\chi^2$-Test für die Varianz ☐

   (c) 2-Stichproben-$t$-Test für den Mittelwert ☐

   (d) $F$-Test für die Varianzen ■

3. Bei einem Chi-Quadrat-Anpassungstest soll anhand einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 100$ überprüft werden, ob die Grundgesamtheit normalverteilt ist. Nach Wahl einer geeigneten Klassierung aus 8 Klassen werden dazu zunächst die beiden unbekannten Parameter der Normalverteilung durch eine ML-Schätzung aus den klassierten Daten ermittelt. Damit ist zur Konstruktion des Ablehnungsbereiches die folgende Verteilung zu verwenden:

   (a) $\chi^2$-Verteilung mit 8 Freiheitsgraden ☐

   (b) $\chi^2$-Verteilung mit 7 Freiheitsgraden ☐

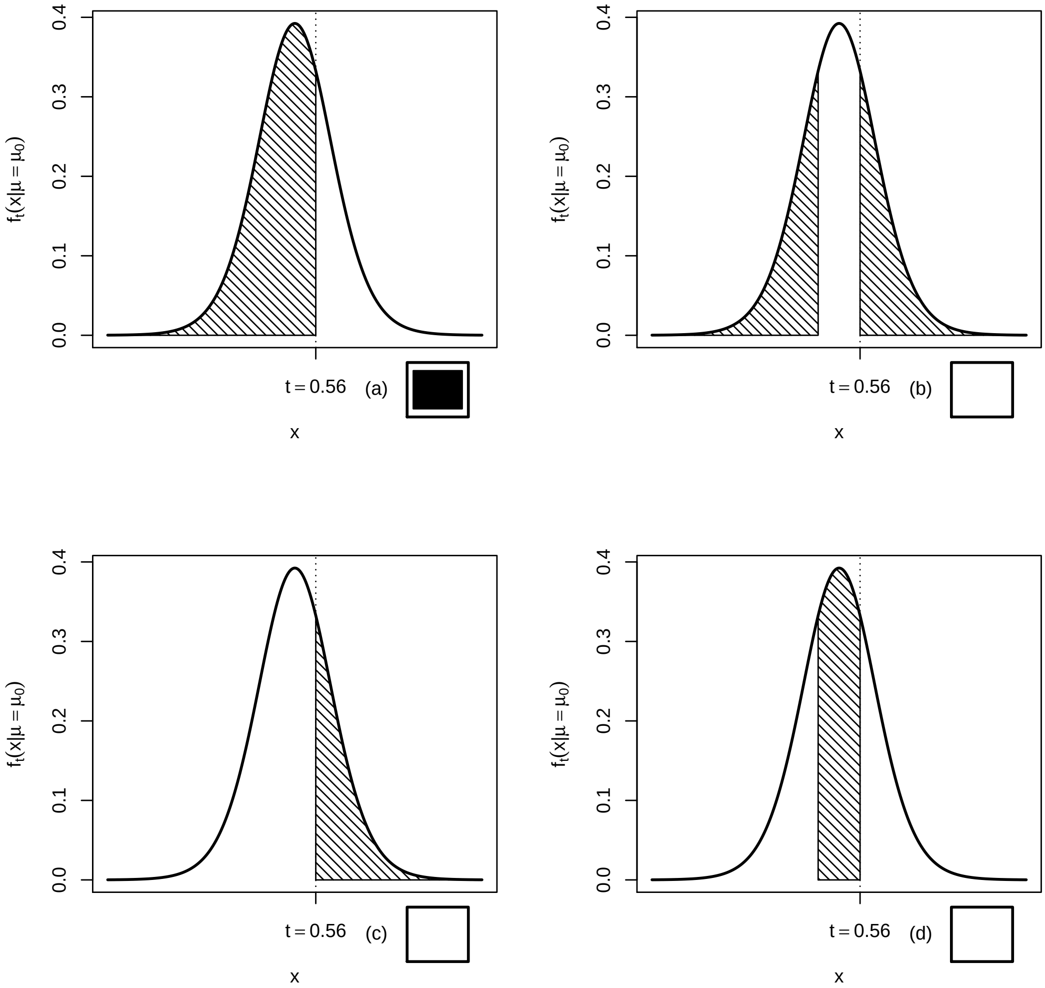
   (c) $\chi^2$-Verteilung mit 6 Freiheitsgraden ☐

   (d) $\chi^2$-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden ■

4. Sei $X_1, \ldots, X_{16}$ eine einfache Stichprobe zu einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen $Y$ mit unbekannten Parametern $\mu$ und $\sigma$. Auf der Grundlage einer Stichprobenrealisation zu einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 16$ soll

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 = 15 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu < \mu_0 = 15$$

getestet werden. Als realisierte Teststatistik erhält man $t = 0.56$. Markieren Sie die Abbildung, welche den $p$-Wert in der beschriebenen Situation korrekt als Inhalt der schraffierten Fläche unter der Dichtefunktion der Verteilung der Teststatistik unter $H_0$ (für $\mu = \mu_0$) darstellt.



**Aufgabe 3** (3 + 2 + 6 = 11 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen $Y$ sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $a > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{a^3} \cdot y^2 & \text{für } 0 \leq y \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter $a$ soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang $n$ geschätzt werden.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{E}(Y) = \frac{3}{4} \cdot a$ gilt.

(b) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{a}_{MM}$ nach der Methode der Momente.

(c) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{a}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

*Hinweise:*

- *Beachten Sie, dass Sie Teil (b) mit dem angegebenen Resultat auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*

**Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):**

(a) Nachweis durch Berechnung des Erwartungswerts.

(b) $\widehat{a}_{MM} = \frac{4}{3}\overline{x}$

(c) $\widehat{a}_{ML} = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$

**Aufgabe 4** (7 + 3 + 4 + 4 = 18 Punkte)

Bei der Herstellung von Nasenspray weiß man aus langjähriger Erfahrung, dass die verwendete Abfüllanlage eine Varianz von $0.2^2 = 0.04[ml^2]$ für die abgefüllte Flüssigkeitsmenge hat. Nach einer Inventur hat der Hersteller den Verdacht, dass die Abfüllanlage im Mittel weniger als die auf dem Produkt ausgezeichneten $10[ml]$ in die Sprühflaschen einfüllt. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 16 Flaschen entnommen, deren gemessene Füllmengen $x_1, \ldots, x_{16}$ als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 16 zur annahmegemäß $N(\mu, 0.2^2[ml^2])$-verteilten Abfüllmenge betrachtet werden kann. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

$$\overline{x} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i = 9.867[ml] \ .$$

(a) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Berechnen Sie den $p$-Wert zum Test aus Teil (a).

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, falls $\mu = 9.9[ml]$ beträgt?

(d) Geben Sie auf Basis der Stichprobenrealisation ein zweiseitiges Konfidenzintervall für die mittlere Abfüllmenge zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ an.

**Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):**

(a) $N = -2.66 \in (-\infty, -1.645) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Test bestätigt also den Verdacht der Herstellerfirma, dass die von der Maschine abgefüllte Menge im Mittel zu niedrig ist.

(b) $p$-Wert: 0.0039

(c) Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art für $\mu = 9.9$: 0.3632

(d) Realisiertes symmetrisches Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1-\alpha$: $[9.769, 9.965]$

**Aufgabe 5** (16 Punkte)

Ein Statistik-Dozent stellt in einigen seiner Veranstaltungen Zusatzübungsblätter zur Verfügung, die von den Veranstaltungsteilnehmern auf freiwilliger Basis bearbeitet werden können. Um zu überprüfen, ob es einen Zusammenhang zwischen der Bearbeitung der Zusatzübungsblätter (keins bearbeitet/mindestens eins bearbeitet) und dem erreichten Klausurergebnis (Zugehörigkeit zu Notengruppe) gibt, hat der Dozent aus den Korrekturergebnissen der Zusatzübungsblätter und der Klausuren die folgende Tabelle zusammengestellt:

| | Note 1.0 – 2.3 | Note 2.7 – 4.0 | Note 5.0 |
|---|---|---|---|
| kein Zusatzblatt bearbeitet | 48 | 123 | 72 |
| mind. 1 Zusatzblatt bearbeitet | 46 | 60 | 11 |

Überprüfen Sie anhand dieses Datenmaterials zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ **(!)**, ob die Bearbeitung der Zusatzübungsblätter und das Klausurergebnis abhängig sind.

*Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen:*

| $n \backslash p$ | 0.01 | 0.025 | 0.05 | 0.5 | 0.9 | 0.95 | 0.975 | 0.99 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.000 | 0.001 | 0.004 | 0.455 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 |
| 2 | 0.020 | 0.051 | 0.103 | 1.386 | 4.605 | 5.991 | 7.378 | 9.210 |
| 3 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 2.366 | 6.251 | 7.815 | 9.348 | 11.345 |
| 4 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 3.357 | 7.779 | 9.488 | 11.143 | 13.277 |
| 5 | 0.554 | 0.831 | 1.145 | 4.351 | 9.236 | 11.070 | 12.833 | 15.086 |
| 6 | 0.872 | 1.237 | 1.635 | 5.348 | 10.645 | 12.592 | 14.449 | 16.812 |
| 7 | 1.239 | 1.690 | 2.167 | 6.346 | 12.017 | 14.067 | 16.013 | 18.475 |
| 8 | 1.646 | 2.180 | 2.733 | 7.344 | 13.362 | 15.507 | 17.535 | 20.090 |
| 9 | 2.088 | 2.700 | 3.325 | 8.343 | 14.684 | 16.919 | 19.023 | 21.666 |
| 10 | 2.558 | 3.247 | 3.940 | 9.342 | 15.987 | 18.307 | 20.483 | 23.209 |

**Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):**

$\chi^2 = 25.598 \in (9.21, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!
Der Test kommt also zum Ergebnis, dass die Bearbeitung der Zusatzübungsblätter und das Klausurergebnis stochastisch abhängig sind.

**Aufgabe 6** (15 Punkte)

Anhand der Ergebnisse der Klausur zur Veranstaltung „Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung" des Sommersemesters 2010 soll mit Hilfe einer einfachen Varianzanalyse untersucht werden, ob die Verteilung der von den Studierenden im Fach „Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung" erreichten Punktzahlen abhängig davon ist, in welchem Fachsemester man sich zum Zeitpunkt der Klausurteilnahme befunden hat. Dazu wurde eine Einteilung in Gruppe 1 (1.-2. Fachsemester), Gruppe 2 (3.-4. Fachsemester), Gruppe 3 (5.-6. Fachsemester) und Gruppe 4 (mindestens 7. Fachsemester) vorgenommen. Zu dieser Aufteilung wurden die folgenden Daten zu den erreichten Punktzahlen erhoben:

| $j$ (Gruppe) | $n_j$ | $\overline{x}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}$ | $\sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 277 | 59.852 | 1114808.50 |
| 2 | 45 | 54.644 | 151071.50 |
| 3 | 29 | 58.034 | 106740.00 |
| 4 | 17 | 52.147 | 51305.75 |

Für die Durchführung der einfachen Varianzanalyse wurde hieraus bereits die Größe $SW = 153372.027$ berechnet.
Überprüfen Sie mit einer einfachen Varianzanalyse (Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$) unter der Annahme, dass die erreichten Punktzahlen Realisierungen von unabhängig $N(\mu_j, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen $X_{j,i} (1 \leq j \leq 4, 1 \leq i \leq n_j)$ sind, ob die Zugehörigkeit zu den oben beschriebenen Gruppen von Studierenden einen Einfluss auf die erreichte Punktzahl hat. Fassen Sie das Ergebnis der Varianzanalyse auch in einem Antwortsatz zusammen.

*Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit* 0.95*-Quantilen von* $F(m,n)$*-Verteilungen:*

| $n\backslash m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 364 | 365 | 366 | 367 | 368 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161.448 | 199.500 | 215.707 | 224.583 | 230.162 | 253.964 | 253.965 | 253.966 | 253.967 | 253.968 |
| 2 | 18.513 | 19.000 | 19.164 | 19.247 | 19.296 | 19.493 | 19.493 | 19.493 | 19.493 | 19.493 |
| 3 | 10.128 | 9.552 | 9.277 | 9.117 | 9.013 | 8.534 | 8.534 | 8.534 | 8.534 | 8.534 |
| 4 | 7.709 | 6.944 | 6.591 | 6.388 | 6.256 | 5.638 | 5.638 | 5.638 | 5.638 | 5.638 |
| 5 | 6.608 | 5.786 | 5.409 | 5.192 | 5.050 | 4.376 | 4.376 | 4.376 | 4.376 | 4.376 |
| 364 | 3.867 | 3.021 | 2.629 | 2.396 | 2.239 | 1.188 | 1.188 | 1.188 | 1.188 | 1.188 |
| 365 | 3.867 | 3.020 | 2.629 | 2.396 | 2.239 | 1.188 | 1.188 | 1.188 | 1.188 | 1.188 |
| 366 | 3.867 | 3.020 | 2.629 | 2.396 | 2.239 | 1.188 | 1.188 | 1.188 | 1.188 | 1.188 |
| 367 | 3.867 | 3.020 | 2.629 | 2.396 | 2.239 | 1.188 | 1.188 | 1.188 | 1.188 | 1.187 |
| 368 | 3.867 | 3.020 | 2.629 | 2.396 | 2.239 | 1.188 | 1.188 | 1.188 | 1.187 | 1.187 |

**Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):**
$F = 1.464 \notin (2.629, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!
Die einfache Varianzanalyse kommt also zum Ergebnis, dass kein signifikanter ($\alpha = 0.05$) Einfluss der Fachsemesterzahl auf die erreichte Punktzahl besteht.

**Aufgabe 7** (6 + 2 + 3 + 3 + 5 + 3 + 5 = 27 Punkte)

Man nehme an, dass ein Zusammenhang zwischen den in der Klausur zur Deskriptiven Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung erreichten Punktzahlen $x_i$ und den in der Klausur zur Schließenden Statistik erreichten Punktzahlen $y_i$ in Form des einfachen linearen Regressionsmodells

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

besteht.

Von den Studierenden der Universität des Saarlandes, die an den betreffenden Klausuren im SS 2010 bzw. im WS 2010/11 teilgenommen haben, wurden (zufällig) $n = 25$ Teilnehmer ausgewählt und aus den erzielten Ergebnissen zur Durchführung einer einfachen linearen Regressionsanalyse bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

$$\sum_{i=1}^{25} y_i = 2103.5; \quad \sum_{i=1}^{25} y_i^2 = 183719.25; \quad \sum_{i=1}^{25} x_i = 1751.5;$$

$$\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 129275.75; \quad \sum_{i=1}^{25} x_i \cdot y_i = 151952; \quad \sum_{i=1}^{25} \hat{y}_i^2 = 180184.458.$$

(a) Schätzen Sie $\beta_1$ und $\beta_2$ mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.

(b) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß $R^2$.

(c) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für $\sigma^2$ den realisierten Schätzwert für $\sigma^2$ an.

(d) Berechnen Sie $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1}$ und $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2}$.

(e) Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob $\beta_1$ signifikant positiv ist. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

(f) Geben Sie ein symmetrisches Konfidenzintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für $\beta_2$ an.

(g) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.90$ **(!)** für die in der Klausur zur Schließenden Statistik erreichte Punktzahl $y_0$ an, wenn in der Klausur zur Deskriptiven Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung $x_0 = 80$ Punkte erreicht wurden.

**Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):**

(a) $\widehat{\beta}_1 = 35.259$, $\widehat{\beta}_2 = 0.6977$

(b) $R^2 = 0.4748$

(c) $\widehat{\sigma}^2 = 153.684$

(d) $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1} = 121.04$, $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2} = 0.02341$

(e) $t = 3.205 \in (1.714, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

$\beta_1$ ist also signifikant positiv.

(f) $[0.3811, 1.014]$

(g) $[69.249, 112.901]$

**Aufgabe 8** (1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte)

Zur Erklärung des Quartalsumsatzes $y_i$ (in Mio. €) durch das zugehörige Werbebudget $x_i$ (in Mio. €) unterstellt eine (fiktive) Brauerei die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \; i \in \{1, \ldots, n\}$$

Mit den Geschäftszahlen von $n = 12$ Quartalen wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-8.9044 -1.4504  0.7109  2.0402  4.3024 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  15.9994     5.4585   2.931 0.015013 *  
x             4.0422     0.7172   5.636 0.000216 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 3.784 on 10 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.7606,       Adjusted R-squared: 0.7366 
F-statistic: 31.77 on 1 and 10 DF,  p-value: 0.0002165
```

(a) Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für $\beta_1$ und $\beta_2$ an.

(b) Geben Sie den realisierten Schätzwert für $\sigma^2$ an.

(c) Welcher Anteil der Gesamtvarianz der Quartalsumsätze wird durch das lineare Modell erklärt?

(d) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen $p$-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$, ob $\beta_2$ signifikant von Null verschieden ist.

(e) Wie viele Euro Umsatz generiert (der Modellschätzung entsprechend) ein zusätzlich in Werbung investierter Euro?

**Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):**

(a) $\widehat{\beta}_1 = 15.9994$, $\widehat{\beta}_1 = 4.0422$

(b) $\widehat{\sigma}^2 = 14.319$

(c) 0.7606

(d) $\beta_2$ signifikant von Null verschieden.

(e) 4.0422€