Aufgabenstellung und Ergebnisse zur

Bachelor-Prüfung
Schliessende Statistik
Wintersemester 2022/23

apl. Prof. Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 18 + 15 + 5 + 8 + 16 + 18 + 13 + 6 + 21) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen zur Normal- und t-Verteilung finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den Seiten 1–11 berücksichtigt. Das letzte Blatt (Tabellen zur Normal- und t-Verteilung) darf abgetrennt werden.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.
- Alle Punkte innerhalb von Zahlen sind stets Dezimalpunkte (und keine Tausenderpunkte).

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben							
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	Σ
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
Σ							

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

		wahr	falsch
1.	Handelt es sich bei $X_1, \ldots, X_n$ um die Zufallsvariablen aus einer einfachen Stichprobe, so sind $X_1, \ldots, X_n$ stets normalverteilt.	☐	■
2.	Gilt $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[(\widehat{\theta}_n - \theta)^2] = 0$ für alle $\theta \in \Theta$, so ist die Folge von Schätzfunktion $\widehat{\theta}_n$ effizient für θ.	☐	■
3.	Zur Schätzung des Parameters $\lambda > 0$ seien für $n \in \mathbb{N}$ Schätzfunktionen T_n gegeben mit den Eigenschaften $\mathrm{E}(T_n) = \frac{n}{n+1}\lambda$ und $\mathrm{Var}(T_n) = \frac{3}{n}\lambda^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Folge T_n von Schätzfunktionen für λ konsistent im quadratischen Mittel.	■	☐
4.	Ist die Nullhypothese H_0 tatsächlich falsch, so wird man bei der Anwendung eines statistischen Tests zum Signifikanzniveau 0.10 mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% eine Stichprobenrealisation erhalten, die zu einer Ablehnung von H_0 führt.	☐	■
5.	Hat die Teststatistik t bei der Durchführung eines rechtsseitigen t-Tests für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen bei unbekannter Varianz mit Stichprobenumfang n einen zugehörigen p-Wert von 0.06847, so gilt $t \in [t_{n-1;0.90}, t_{n-1;0.95})$.	■	☐
6.	Bei der Anwendung des zweiseitigen Gauß-Tests zum Signifikanzniveau α sind die resultierenden p-Werte nach oben durch $1-\alpha$ beschränkt.	☐	■
7.	Zur Durchführung eines Mittelwertvergleichs auf Basis einer zweidimensional normalverteilten (verbundenen) Stichprobe mit einem t-Differenzentest liegen als Stichprobeninformation 11 Paare (mit jeweils zwei Beobachtungswerten) vor. Dann ist zur Konstruktion des kritischen Bereichs eine t-Verteilung mit 10 Freiheitsgraden zu verwenden.	■	☐
8.	Ist laut Ergebnis eines Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstests von einer stochastischen Abhängigkeit der untersuchten Zufallsvariablen auszugehen, obwohl diese tatsächlich stochastisch unabhängig sind, so handelt es sich um einen Fehler 2. Art.	☐	■
9.	Sind die Voraussetzungen zur exakten Anwendung der einfachen Varianzanalyse erfüllt, so unterscheiden sich die Verteilungen in den einzelnen Gruppen bzw. Faktorstufen höchstens in der Lage.	■	☐

Aufgabe 2 (15 Punkte)

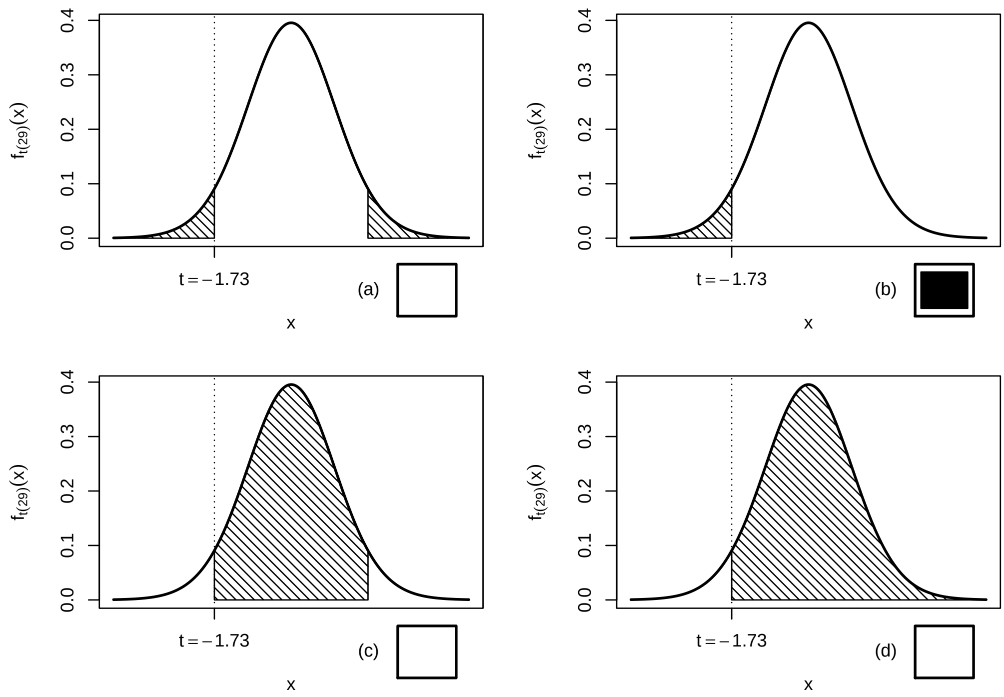
Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.
Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

1. Beim zweiseitigen t-Test für den Mittelwert normalverteilter Zufallsvariablen bei unbekannter Varianz führt ein beobachteter Abstand des Stichprobenmittelwerts $\overline{x}$ zum „Sollwert" μ_0 umso eher zur Ablehnung von H_0, je
   (a) geringer die Streuung s der Stichprobe und je geringer das Signifikanzniveau α ist. ☐
   (b) größer die Streuung s der Stichprobe und je geringer das Signifikanzniveau α ist. ☐
   (c) geringer die Streuung s der Stichprobe und je größer das Signifikanzniveau α ist. ■
   (d) größer die Streuung s der Stichprobe und je größer das Signifikanzniveau α ist. ☐

2. Sei $X_1, \ldots, X_{30}$ eine einfache Stichprobe zu einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen Y mit unbekannten Parametern μ und σ^2. Auf der Grundlage einer Stichprobenrealisation zu dieser einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 30$ soll

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 = 20 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu < \mu_0 = 20$$

mit einem t-Test getestet werden. Als realisierte Teststatistik erhält man $t = -1.73$. Markieren Sie die Abbildung, welche den p-Wert in der beschriebenen Situation korrekt als Inhalt der schraffierten Fläche unter der Dichtefunktion der Verteilung der Teststatistik unter H_0 (für $\mu = \mu_0$) darstellt.



3. Es sei $X_1, \ldots, X_{25}$ eine einfache Stichprobe vom Umfang 25 zu Y mit $Y \sim N(38, 4^2)$. Dann gilt für die Teststatistik $N = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ des Gauß-Tests für den Mittelwert einer normalverteilten Zufallsvariablen mit bekannter Varianz zur Nullhypothese H_0 : $\mu = 40$:

   (a) $N \sim N\left(-2.5, 1\right)$ ■

   (b) $N \sim N\left(2.5, 1\right)$ ☐

   (c) $N \sim N\left(-0.625, 1\right)$ ☐

   (d) $N \sim N\left(0.625, 1\right)$ ☐

4. Auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang n zu einer Zufallsvariablen Y, von der man lediglich weiß, dass sie normalverteilt ist, soll mit einem Signifikanztest überprüft werden, ob $\mathrm{Var}(Y) \neq 5^2$ gilt. Zur Untersuchung dieser Fragestellung ist geeignet:

   (a) Der F-Test zum Varianzvergleich ☐

   (b) Der χ^2-Test für die Varianz bei unbekanntem Erwartungswert ■

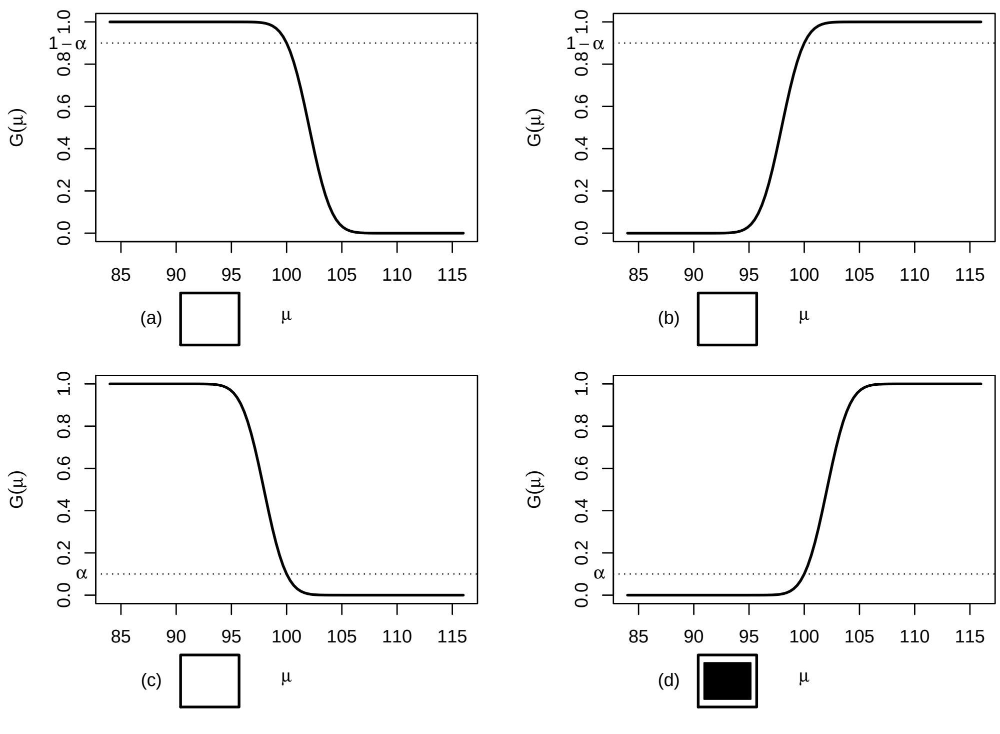
   (c) Die einfache Varianzanalyse ☐

   (d) Keines der in der Vorlesung besprochenen Verfahren ☐

5. Auf der Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_{25}$ vom Umfang $n = 25$ zu einer $N(\mu, 8^2)$-verteilten Zufallsvariablen wird ein Gauß-Test zur Überprüfung der Hypothesen

$$H_0 : \mu \leq 100 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu > 100$$

bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.1$ betrachtet.
Markieren Sie die Abbildung, welche die Gütefunktion des oben genannten Tests korrekt darstellt.



Aufgabe 3 (5 Punkte)

Für $0 < p < 1$ sei $Y \sim \text{Geom}(p)$, es gilt also insbesondere $\text{E}(Y) = \frac{1-p}{p}$ sowie $\text{Var}(Y) = \frac{1-p}{p^2}$. $X_1, \ldots, X_n$ sei für $n \in \mathbb{N}$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y. Untersuchen Sie, ob die Schätzfunktionen

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) := \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^2 + X_i\right)$$

erwartungstreu für **die Varianz von** Y sind.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

Die Schätzfunktionen $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ sind erwartungstreu für die Varianz von Y.

Aufgabe 4 (6 + 2 = 8 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen Y sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $a > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|a) = \begin{cases} \dfrac{a^3}{2} \cdot (y-2)^2 \cdot e^{-a \cdot (y-2)} & \text{für } y > 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter a soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang n geschätzt werden.

(a) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{a}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

(b) Man kann zeigen, dass $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{3}{a} + 2$ gilt. Bestimmen Sie damit den Schätzer $\widehat{a}_{MM}$ nach der Methode der Momente.

Hinweise:

- *Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{a}_{ML} = \dfrac{3 \cdot n}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - 2)} = \dfrac{3}{\overline{x} - 2}$

(b) $\widehat{a}_{MM} = \dfrac{3}{\overline{x} - 2}$

Aufgabe 5 (7 + 2 + 4 + 3 = 16 Punkte)

Bei der Abfüllung von Zahnpasta weiß der Hersteller aus Erfahrung, dass die verwendete Maschine eine Standardabweichung von $1.2[ml]$ für die abgefüllte Menge hat. Nach einer Inventur hat der Hersteller den Verdacht, dass die Maschine im Mittel weniger als die auf dem Produkt ausgezeichneten $75[ml]$ in die Tuben einfüllt. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 16 Tuben entnommen, deren gemessene Füllmengen $x_1, \ldots, x_{16}$ als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 16 zur annahmegemäß $N(\mu, 1.2^2[ml^2])$-verteilten Abfüllmenge betrachtet werden können. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

$$\overline{x} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i = 74.3404[ml] \ .$$

(a) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Berechnen Sie den p-Wert zum Test aus Teil (a). Wie wäre die Entscheidung zum Test aus Teil (a) bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.01$ ausgefallen?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Ziehung einer Stichprobe und der anschließenden Durchführung des Tests aus Teil (a) eine Testentscheidung zu Gunsten der Nullhypothese zu erhalten, falls die tatsächliche mittlere Abfüllmenge $74.25[ml]$ beträgt?

(d) Erläutern Sie kurz – wahlweise mit Hilfe der Gütefunktion oder der Verteilung der Teststatistik in Abhängigkeit von μ –, warum die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art mit wachsendem μ fällt.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $N = -2.1987 \in (-\infty, -1.645) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Test bestätigt also den Verdacht der Herstellerfirma, dass die von der Maschine abgefüllte Menge im Mittel zu niedrig ist.

(b) p-Wert $p = 0.0139$. Entscheidung wäre zu Gunsten der Nullhypothese ausgefallen.

(c) $\beta(74.25) = 0.1949$

(d) *Verstandenen Zusammenhang wiedergeben.*

Aufgabe 6 (10 + 8 = 18 Punkte)

Zur Überprüfung, ob ein mit einer höheren Reißfestigkeit beworbenes Seilfabrikat („Typ B“) tatsächlich im Mittel eine höhere Reißfestigkeit besitzt als das bisher verwendete Fabrikat („Typ A“), soll ein statistischer Test auf Basis von exemplarisch durchgeführten Belastbarkeitsprüfungen durchgeführt werden. Hierbei soll davon ausgegangen werden, dass die Reißfestigkeiten der Seilfabrikate (gemessen in [kg]) Y^A (zu Typ A) bzw. Y^B (zu Typ B) jeweils normalverteilt seien mit unbekannten Erwartungswerten μ_A bzw. μ_B und unbekannten Varianzen σ_A^2 bzw. σ_B^2. Es soll überprüft werden, ob Seile des Typs B im Mittel eine höhere Reißfestigkeit als solche des Typs A besitzen.
Aus einer Belastbarkeitsprüfung mit $n_A = 12$ Seilen des Typs A sowie $n_B = 14$ Seilen des Typs B erhielt man Realisationen jeweils voneinander unabhängiger einfacher Stichproben $X_1^A, \ldots, X_{12}^A$ zu Y^A sowie $X_1^B, \ldots, X_{14}^B$ zu Y^B und hieraus die zugehörigen Mittelwerte $\overline{x^A} = 260.67$ bzw. $\overline{x^B} = 274.71$ sowie die Stichprobenvarianzen $s_{Y^A}^2 = 158.24$ bzw. $s_{Y^B}^2 = 81.45$.

(a) Testen Sie unter der Annahme $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass Seile des Typs B im Mittel eine höhere Reißfestigkeit als solche des Typs A besitzen. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$, ob die in Teil (a) getroffene Annahme der Varianzgleichheit auf Grundlage der vorhandenen Stichprobeninformation verworfen werden muss. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

Hinweis: Verwenden Sie für Teil (b) den folgenden Tabellenausschnitt mit 0.95*-Quantilen von* $F(m,n)$*-Verteilungen sowie ggf. die Rechenregel* $F_{m,n;p} = \frac{1}{F_{n,m;1-p}}$.

$n \backslash m$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	2.818	2.788	2.761	2.739	2.719	2.701	2.685	2.671	2.658	2.646
12	2.717	2.687	2.660	2.637	2.617	2.599	2.583	2.568	2.555	2.544
13	2.635	2.604	2.577	2.554	2.533	2.515	2.499	2.484	2.471	2.459
14	2.565	2.534	2.507	2.484	2.463	2.445	2.428	2.413	2.400	2.388
15	2.507	2.475	2.448	2.424	2.403	2.385	2.368	2.353	2.340	2.328
16	2.456	2.425	2.397	2.373	2.352	2.333	2.317	2.302	2.288	2.276
17	2.413	2.381	2.353	2.329	2.308	2.289	2.272	2.257	2.243	2.230
18	2.374	2.342	2.314	2.290	2.269	2.250	2.233	2.217	2.203	2.191
19	2.340	2.308	2.280	2.256	2.234	2.215	2.198	2.182	2.168	2.155
20	2.310	2.278	2.250	2.225	2.203	2.184	2.167	2.151	2.137	2.124

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $t = -3.305 \in (-\infty, -1.711) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Test kann also die Vermutung, dass Seile des Typs B im Mittel eine höhere Reißfestigkeit als solche des Typs A besitzen, bestätigen.

(b) $F = 1.943 \notin [0, 0.362) \cup (2.635, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!

Der Test findet also keine Evidenz für eine Verletzung der in Teil (a) angenommenen Varianzgleichheit.

Aufgabe 7 (11 + 2 = 13 Punkte)

Ein Rollenspieler hat mit Hilfe eines 3D-Druckers ein Exemplar eines 5-seitigen Würfels hergestellt und möchte überprüfen, ob etwas dagegen spricht, dass es sich hierbei um einen fairen Würfel handelt, bei dem alle 5 Punktzahlen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.
Probeweise hat er hierzu 100 Würfe mit dem Würfel durchgeführt, dabei haben sich die folgenden (absoluten) Häufigkeiten für die jeweiligen Punktzahlen ergeben:

Punktzahl	1	2	3	4	5
Häufigkeit	18	14	26	13	29

(a) Prüfen Sie mit Hilfe eines geeigneten statistischen Tests unter der üblichen (und plausiblen) Unabhängigkeitsannahme für wiederholtes Werfen eines Würfels, ob Zweifel an der Fairness des Würfels angebracht sind. Legen Sie hierzu ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ zugrunde.

(b) Welcher Stichprobenumfang ist für den oben angewendeten Test mindestens erforderlich, um die typischerweise verwendete Bedingung zur Angemessenheit der Näherung der Verteilung der Teststatistik unter H_0 zu erfüllen?

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen:

$n \backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	0.455	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	4.351	9.236	11.070	12.833	15.086
6	0.872	1.237	1.635	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\chi^2 = 10.3 \in (9.488, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Würfel ist also signifikant unfair.

(b) 25

Aufgabe 8 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Zur Erklärung des Heizölpreises je Liter y_i (in Eurocent) durch den Rohölpreis (UK Brent) je Barrel x_i (in USD) unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),\ i \in \{1, \ldots, n\}$$

Aus vorliegenden monatlichen Durchschnittspreisen von Dezember 2021 bis November 2022 wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-32.470 -15.595  -3.176  15.372  33.796

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  19.9396    49.6729   0.401   0.6966
x             1.0909     0.4911   2.221   0.0506 .
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 23.22 on 10 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3304,        Adjusted R-squared:  0.2634
F-statistic: 4.934 on 1 and 10 DF,  p-value: 0.05059
```

(a) Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für β_1 und β_2 an.

(b) Geben Sie den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(c) Welcher Anteil der Gesamtvarianz des Heizölpreises je Liter wird durch das lineare Modell erklärt?

(d) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$, ob β_1 signifikant von Null verschieden ist.

(e) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob β_2 signifikant positiv ist.

(f) Welchen Heizölpreis je Liter (in Eurocent) prognostiziert das Modell bei einem Rohölpreis (in USD) je Barrel von 100 (in USD)?

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\beta}_1 = 19.9396$, $\widehat{\beta}_2 = 1.0909$

(b) $\widehat{\sigma^2} = 539.1684$

(c) 0.3304

(d) β_1 ist nicht signifikant von Null verschieden.

(e) β_2 ist signifikant positiv.

(f) 129.0296

Aufgabe 9 (6 + 2 + 3 + 5 + 5 = 21 Punkte)

Zur Schätzung eines einfachen linearen Regressionsmodells

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 20$ wurden bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

$$\sum_{i=1}^{20} y_i = 164; \quad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 1771.16; \quad \sum_{i=1}^{20} x_i = 111.17;$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 678.97; \quad \sum_{i=1}^{20} x_i \cdot y_i = 1046.36$$

(a) Schätzen Sie β_1 und β_2 mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.

(b) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für σ^2 den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(c) Berechnen Sie $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1}$ und $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2}$.

(d) Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ **(!)**, ob β_2 signifikant positiv ist. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

(e) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für y_0 gegeben $x_0 = 6$ an.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\beta}_1 = -4.0737$, $\widehat{\beta}_2 = 2.2081$

(b) $\widehat{\sigma}^2 = 7.1546$

(c) $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1} = 3.9797$, $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2} = 0.11723$

(d) $t = 6.449 \in (2.552, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

β_2 ist also signifikant positiv.

(e) $[3.408, 14.942]$