Aufgabenstellung und Ergebnisse zur

Bachelor-Prüfung
Schliessende Statistik
Wintersemester 2021/22

PD Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 8 + 11 + 25 + 10 + 14 + 6 + 18) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen zur Normal- und t-Verteilung finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den Seiten 1–12 berücksichtigt. Das letzte Blatt (Tabellen zur Normal- und t-Verteilung) darf abgetrennt werden.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.
- Alle Punkte innerhalb von Zahlen sind stets Dezimalpunkte (und keine Tausenderpunkte).

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben							
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	Σ
1		■	■	■	■	■	
2		■	■	■	■	■	
3				■	■	■	
4				■	■	■	
5						■	
6		■	■	■	■	■	
7		■	■	■	■	■	
8							
9						■	
Σ							

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

	Aussage	wahr	falsch
1.	Handelt es sich bei $X_1, \dots, X_n$ um eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y, dann stimmen die Verteilungen von $X_1, \dots, X_n$ stets mit der Verteilung von Y überein.	■	□
2.	Sei $\widehat{\theta}$ eine Schätzfunktion für θ. Dann ist $\widehat{\theta}$ genau dann erwartungstreu für θ, wenn $\mathsf{Bias}(\widehat{\theta}) = 0$ gilt.	■	□
3.	Zur Schätzung des Parameters $\theta \in \mathbb{R}$ seien für $n \in \mathbb{N}$ Schätzfunktionen T_n gegeben mit den Eigenschaften $\mathrm{E}(T_n) = \theta + \frac{1}{n}$ und $\mathrm{Var}(T_n) = 1 + \frac{2}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Folge T_n von Schätzfunktionen für θ konsistent im quadratischen Mittel.	□	■
4.	Bei Konfidenzintervallen für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen mit bekannter Varianz beeinflusst die Stichprobenrealisation nicht nur die Lage, sondern auch die Breite der realisierten Konfidenzintervalle.	□	■
5.	Bei der Durchführung eines t-Tests für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen bei unbekannter Varianz auf Grundlage einer einfachen Stichprobe vom Umfang n zum Signifikanzniveau α lehnen sowohl der rechtsseitige als auch der zweiseitige Test H_0 ab. Damit gilt für die Realisation t der Teststatistik: $t \in [t_{n-1,1-\alpha}, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}})$	□	■
6.	Die Gütefunktion eines Gauß-Tests gibt zu jedem möglichen Erwartungswert μ an, mit welcher Wahrscheinlichkeit man eine Realisation der Teststatistik außerhalb des kritischen Bereichs erhält, falls μ der zur tatsächlichen (Normal-)Verteilung von Y gehörende Erwartungswert ist.	□	■
7.	Wird H_0 bei der Durchführung eines rechtsseitigen F-Tests zum Varianzvergleich zweier normalverteilter Zufallsvariablen bei unbekannten Erwartungswerten zum Signifikanzniveau 0.05 nicht abgelehnt, dann kann die Nullhypothese stets auch zum Signifikanzniveau 0.10 nicht abgelehnt werden.	□	■
8.	Sind die Voraussetzungen zur exakten Anwendung der einfachen Varianzanalyse erfüllt, dann sind bei Gültigkeit der Nullhypothese alle Stichprobenzufallsvariablen $X_{j,i}$ identisch verteilt.	■	□

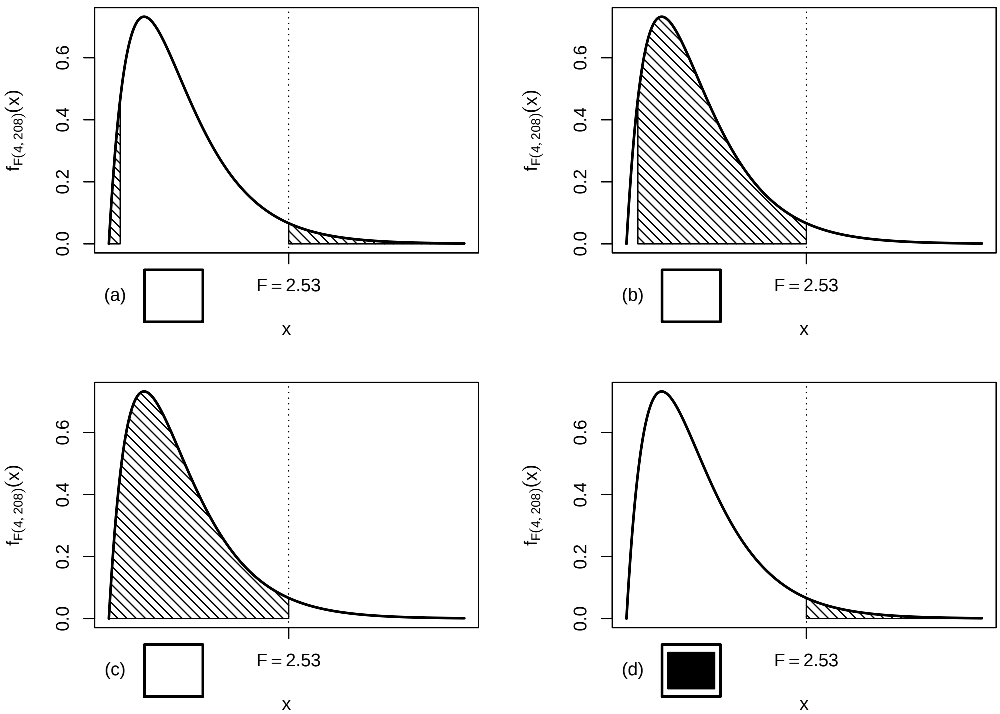
Aufgabe 2 (12 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.
Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

1. Mit einem Chi-Quadrat-Anpassungstest soll anhand einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 200$ überprüft werden, ob die Grundgesamtheit normalverteilt ist. Nach Wahl einer geeigneten Klassierung aus 7 Klassen werden dazu zunächst die beiden unbekannten Parameter der Normalverteilung durch eine ML-Schätzung aus den klassierten Daten ermittelt. Damit ist zur Konstruktion des Ablehnungsbereiches die folgende Verteilung zu verwenden:

   (a) χ^2-Verteilung mit 193 Freiheitsgraden ☐
   (b) χ^2-Verteilung mit 195 Freiheitsgraden ☐
   (c) χ^2-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden ☐
   (d) χ^2-Verteilung mit 4 Freiheitsgraden ■

2. Bei der Durchführung einer einfachen Varianzanalyse mit $k = 5$ Faktorstufen und einem Gesamtstichprobenumfang von $n = 213$ erhält man die realisierte Teststatistik $F = 2.53$. Markieren Sie die Abbildung, welche den p-Wert in der beschriebenen Situation korrekt als Inhalt der schraffierten Fläche unter der Dichtefunktion der Verteilung der Teststatistik unter H_0 darstellt.



3. Als p-Wert zur realisierten Teststatistik eines zweiseitigen Gauß-Tests für den Mittelwert einer normalverteilten Grundgesamtheit bei bekannter Varianz (mit $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$) erhält man $p = 0.1134$. Dann gilt für das Ergebnis der einseitigen Tests (mit $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$ bzw. $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ (auf Grundlage derselben Stichprobenrealisation):

   (a) Auf Grundlage der vorhandenen Informationen ist noch unklar, ob bei keinem, genau einem oder beiden einseitigen Tests H_0 abgelehnt wird.

   (b) Bei beiden einseitigen Tests wird H_0 abgelehnt.

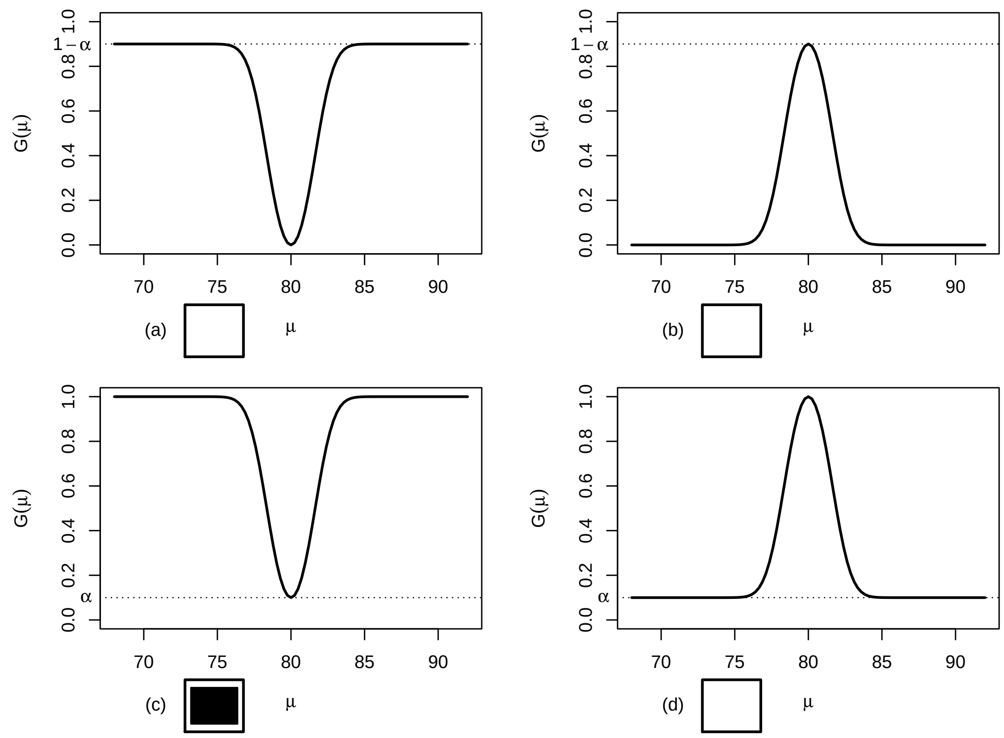
   (c) Bei keinem der beiden einseitigen Tests wird H_0 abgelehnt.

   (d) Bei genau einem der beiden einseitigen Tests wird H_0 abgelehnt. Bei welchem dies der Fall ist, hängt vom Vorzeichen der Teststatistik ab.

4. Auf der Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_{36}$ vom Umfang $n = 36$ zu einer $N(\mu, 6^2)$-verteilten Zufallsvariablen wird ein Gauß-Test zur Überprüfung der Hypothesen

$$H_0 : \mu = 80 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu \neq 80$$

bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.1$ betrachtet.
Markieren Sie die Abbildung, welche die Gütefunktion des oben genannten Tests korrekt darstellt.



Aufgabe 3 (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Zu $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ liegen die unabhängigen einfachen Stichproben $X_1^A, \ldots, X_5^A$ vom Umfang 5 und $X_1^B, \ldots, X_{25}^B$ vom Umfang 25 vor. Mit $\overline{X^A} := \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i^A$ und $\overline{X^B} := \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X_i^B$ werden die Schätzfunktionen

- $\widehat{\mu}_1 = \dfrac{4}{5} \cdot \overline{X^A} + \dfrac{1}{5} \cdot \overline{X^B}$,
- $\widehat{\mu}_2 = \dfrac{1}{5} \cdot \overline{X^A} + \dfrac{3}{5} \cdot \overline{X^B}$ und
- $\widehat{\mu}_3 = \dfrac{1}{5} \cdot \overline{X^A} + \dfrac{4}{5} \cdot \overline{X^B}$

zur Schätzung von μ betrachtet.

(a) Wie sind $\overline{X^A}$ und $\overline{X^B}$ (in Abhängigkeit von μ und σ^2) verteilt?

(b) Welche der Schätzfunktionen $\widehat{\mu}_1$, $\widehat{\mu}_2$ und $\widehat{\mu}_3$ sind erwartungstreu für μ? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Berechnen Sie zu den für μ erwartungstreuen Schätzfunktionen die zugehörige Varianz. Welche dieser Schätzfunktionen würden Sie am ehesten zur Schätzung von μ einsetzen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Es gilt $\overline{X^A} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{5}\right)$ und $\overline{X^B} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{25}\right)$.

(b) Erwartungstreu sind $\widehat{\mu}_1$ und $\widehat{\mu}_3$

(c) $\text{Var}(\widehat{\mu}_1) = \frac{81}{625} \cdot \sigma^2$, $\text{Var}(\widehat{\mu}_3) = \frac{21}{625} \cdot \sigma^2 \Rightarrow \widehat{\mu}_3$ am ehesten zur Schätzung einsetzen.

Aufgabe 4 (6 + 3 + 2 = 11 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen Y sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $\theta > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta+1}{3^{\theta+1}} \cdot y^\theta & \text{für } 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter θ soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang n geschätzt werden.

(a) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{\theta}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

(b) Zeigen Sie, dass $E(Y) = \dfrac{3\theta+3}{\theta+2}$ gilt.

(c) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{\theta}_{MM}$ nach der Methode der Momente.

Hinweise:

- *Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) und Teil (c) ohne die Bearbeitung der Teile (a) und (b) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\dfrac{n}{n\ln(3) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i)} - 1 = \dfrac{1}{\ln(3) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(x_i)} - 1$

(b) Nachweis durch Berechnung des Erwartungswerts

(c) $\widehat{\theta}_{MM} = \dfrac{3 - 2\overline{x}}{\overline{x} - 3}$

Aufgabe 5 (3 + 7 + 4 + 4 + 7 = 25 Punkte)

Eine Maschine produziert Tabletten, deren Wirkstoffgehalt erfahrungsgemäß normalverteilt mit einer Standardabweichung von $5[mg]$ um den tatsächlichen Erwartungswert schwankt. Die laufende Qualitätskontrolle soll eine Überschreitung dieses Erwartungswerts gegenüber dem mittleren Soll-Wirkstoffgehalt $400[mg]$ mit Hilfe eines geeigneten statistischen Testverfahrens auf Basis der Realisation einer einfachen Stichprobe $x_1, \ldots, x_{30}$ aufdecken. Dabei darf eine derartige Überschreitung nur mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% fälschlicherweise signalisiert werden. Aus dem realisierten Stichprobenergebnis erhält man den Stichprobenmittelwert

$$\overline{x} = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} x_i = 403.4[mg] \ .$$

(a) Geben Sie auf Basis des angegebenen Stichprobenmittelwerts ein zweiseitiges Konfidenzintervall für den Mittelwert des Wirkstoffgehalts der produzierten Tabletten zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ an.

(b) Führen Sie den zur oben beschriebenen Qualitätskontrolle geeigneten Test auf Basis des angegebenen Stichprobenmittelwerts durch. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Qualitätskontrolle bei Ziehung einer einfachen Stichprobe **der Länge 25** keine Überschreitung signalisieren, wenn der tatsächliche Erwartungswert des Wirkstoffgehalts der Tabletten $403[mg]$ beträgt?

(d) Wie groß muss der Stichprobenumfang bei der oben beschriebenen Qualitätskontrolle mindestens gewählt werden, wenn eine tatsächliche Überschreitung des Erwartungswerts des Wirkstoffgehalts um $2[mg]$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% erkannt werden soll?

(e) Überprüfen Sie unter Verwendung der Varianzschätzung $s^2 = 24.25$ mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob die oben getroffene Annahme $\sigma^2 = 5^2$ aus statistischer Sicht zu verwerfen ist. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

Hinweis: Verwenden Sie für Teil (e) den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen

$n \backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
26	12.198	13.844	15.379	25.336	35.563	38.885	41.923	45.642
27	12.879	14.573	16.151	26.336	36.741	40.113	43.195	46.963
28	13.565	15.308	16.928	27.336	37.916	41.337	44.461	48.278
29	14.256	16.047	17.708	28.336	39.087	42.557	45.722	49.588
30	14.953	16.791	18.493	29.336	40.256	43.773	46.979	50.892

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Realisiertes symm. Konfidenzintervall zum Konf.-niveau $1-\alpha = 0.95$: $[401.61, 405.19]$

(b) $N = 3.72 \in (1.645, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Test zur Qualitätskontrolle wird also eine Überschreitung des mittleren Wirkstoffgehalts signalisieren.

(c) $\beta(403) = 0.0885$

(d) Der Stichprobenumfang muss mindestens $n = 99$ betragen.

(e) $\chi^2 = 28.13 \notin [0, 16.047) \cup (45.722, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!
Die getroffene Annahme $\sigma^2 = 5^2$ muss also nicht verworfen werden.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Zur Untersuchung des sogenannten Nocebo-Effekts bei Impfungen werden in einer klinischen Studie die Wahrnehmungen von „Impfreaktionen" einer Gruppe tatsächlich geimpfter und einer Gruppe nur scheinbar geimpfter Personen miteinander verglichen. Hierzu werden zunächst durch rein zufällige Zuordnung zwei (unterschiedliche) Gruppen mit jeweils 101 Personen gebildet. Den Personen in Gruppe A wird dann der tatsächliche Impfstoff verabreicht, während den Personen in Gruppe B nur ein Placebo injiziert wird. In einer anschließenden Befragung gaben 46 Personen aus Gruppe A an, Impfreaktionen zu verspüren, während diese Angabe von 35 Personen aus Gruppe B gemacht wurde.
Überprüfen Sie unter der Annahme, dass es sich bei dem Stichprobenergebnis um die Realisation zweier unabhängiger einfacher Stichproben handelt, zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob sich die Wahrnehmung von Impfreaktionen bei tatsächlich geimpften und nur scheinbar geimpften Personen unterscheidet (bezogen auf die „Erfolgswahrscheinlichkeit" für die Wahrnehmung von „Impfreaktionen"). Formulieren Sie das Ergebnis auch in Form eines Antwortsatzes.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

$t = 1.581 \notin (-\infty, -1.972) \cup (1.972, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!
Der Test findet also keine Anzeichen dafür, dass sich die Wahrnehmung von Impfreaktionen bei tatsächlich geimpften und nur scheinbar geimpften Personen unterscheidet.

Aufgabe 7 (14 Punkte)

Um zu untersuchen, ob es einen generellen Zusammenhang zwischen dem Impfstatus (ungeimpft / vollständig geimpft) und der Schwere der Erkrankung bei einer (symptomatischen) Covid19-Infektion (nicht hospitalisiert / Normalstation / Intensivstation) in der Altersgruppe 60+ gibt, wurden die im RKI-Wochenbericht für die Meldewochen 52/2021 bis 03/2022 gelisteten (zur einfacheren Berechnung auf volle Hunderter gerundeten) Daten, die hier als Realisation einer einfachen Stichprobe aufgefasst werden sollen, in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

	ungeimpft	vollständig geimpft
nicht hospitalisiert	9300	20700
Normalstation	1400	1000
Intensivstation	300	100

Überprüfen Sie anhand dieses Datenmaterials zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ **(!)**, ob eine stochastische Abhängigkeit zwischen dem Impfstatus und der Schwere der Erkrankung besteht.

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen:

$n\backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	0.455	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	4.351	9.236	11.070	12.833	15.086
6	0.872	1.237	1.635	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

$\chi^2 = 1057.187 \in (9.21, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!
Es ist also eine signifikante Abhängigkeit zwischen dem Impfstatus und der Schwere der Erkrankung festzustellen.

Aufgabe 8 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Zur Erklärung des systolischen Blutdrucks y_i (in mmHg) durch den BMI x_i (in kg/m^2) unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),\ i \in \{1, \ldots, n\}$$

Aus vorliegenden Daten zu 20 männlichen Personen wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-14.2620  -7.2451  -0.7475   4.1385  30.6288

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   86.205     18.060   4.773 0.000152 ***
x              1.287      0.683   1.884 0.075777 .
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 11.3 on 18 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.1648,       Adjusted R-squared:  0.1184
F-statistic: 3.551 on 1 and 18 DF,  p-value: 0.07578
```

(a) Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für β_1 und β_2 an.

(b) Geben Sie den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(c) Welcher Anteil der Gesamtvarianz des systolischen Blutdrucks wird durch das lineare Modell erklärt?

(d) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$, ob β_1 signifikant von Null verschieden ist.

(e) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob β_2 signifikant positiv ist.

(f) Welchen systolischen Blutdruck (in mmHg) prognostiziert das Modell für einen Mann mit einem BMI von 25 (in kg/m^2)?

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\beta}_1 = 86.205$, $\widehat{\beta}_2 = 1.287$

(b) $\widehat{\sigma^2} = 127.69$

(c) 0.1648

(d) β_1 ist signifikant von Null verschieden.

(e) β_2 ist signifikant positiv.

(f) 118.38

Aufgabe 9 (6 + 2 + 2 + 3 + 5 = 18 Punkte)

Zur Schätzung eines einfachen linearen Regressionsmodells

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 25$ wurden bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

$$\sum_{i=1}^{25} y_i = 199.76; \quad \sum_{i=1}^{25} y_i^2 = 1962.17; \quad \sum_{i=1}^{25} x_i = 91.22;$$

$$\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 403.49; \quad \sum_{i=1}^{25} x_i \cdot y_i = 578.55$$

(a) Schätzen Sie β_1 und β_2 mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.

(b) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß R^2.

(c) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für σ^2 den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(d) Berechnen Sie $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1}$ und $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2}$.

(e) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für $\mathrm{E}(y_0)$ gegeben $x_0 = 4$ an.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\beta}_1 = 15.755$, $\widehat{\beta}_2 = -2.128$

(b) $R^2 = 0.87404$

(c) $\widehat{\sigma}^2 = 2.0041$

(d) $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1} = 0.45784$, $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2} = 0.028368$

(e) $[6.645, 7.841]$