Aufgabenstellung und Ergebnisse zur

Bachelor-Prüfung
Schliessende Statistik
Sommersemester 2016

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 4 + 10 + 16 + 18 + 16 + 7 + 21) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen zur Normal- und t-Verteilung finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den Seiten 1–11 berücksichtigt. Das letzte Blatt (Tabellen zur Normal- und t-Verteilung) darf abgetrennt werden.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben

Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	Σ
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
Σ								

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

		wahr	falsch
1.	Sei $X_1, \dots, X_n$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu einer normalverteilten Zufallsvariablen Y. Dann sind auch $X_1, \dots, X_n$ stets normalverteilt.	■	□
2.	Ist eine Schätzfunktion effizient in einer Klasse erwartungstreuer Schätzfunktionen, so hat keine der Schätzfunktionen in dieser Klasse eine größere Varianz als die effiziente Schätzfunktion selbst.	□	■
3.	Zur Schätzung des Parameters $\theta \in \mathbb{R}$ seien für $n \in \mathbb{N}$ Schätzfunktionen T_n gegeben mit den Eigenschaften $\mathrm{E}(T_n) = \theta$ und $\mathrm{Var}(T_n) = 2 + \frac{2}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Folge T_n von Schätzfunktionen für θ konsistent im quadratischen Mittel.	□	■
4.	Ist p der p-Wert eines zweiseitigen Chi-Quadrat-Tests für die Varianz einer normalverteilten Zufallsvariablen Y mit der Nullhypothese $\sigma^2 = 4$, so weicht die tatsächliche Varianz der Zufallsvariablen Y (betragsmäßig) um mindestens p von 4 ab.	□	■
5.	Gilt für den p-Wert bei Anwendung eines statistischen Hypothesentests zum Signifikanzniveau α die Beziehung $p < \alpha$, so ist die Nullhypothese des Tests nur mit einer Wahrscheinlichkeit von p zutreffend.	□	■
6.	Bei einem rechtsseitigen Gauß-Test von $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$ kann die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art für $\mu > \mu_0$ durch $1 - G(\mu)$ berechnet werden, wobei $G(\mu)$ die Gütefunktion des Tests bezeichnet.	■	□
7.	Mit der einfachen Varianzanalyse kann unter der Annahme, dass sich die Erwartungswerte in den einzelnen Faktorstufen nicht unterscheiden, überprüft werden, ob auch die Varianzen in den Faktorstufen vollständig übereinstimmen.	□	■
8.	Im einfachen linearen Regressionsmodell $$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i, \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$$ sind Prognoseintervalle zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ für y_0 stets größer als die entsprechenden Prognoseintervalle für $\mathrm{E}(y_0)$.	■	□

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.
Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

1. Mit einem Chi-Quadrat-Anpassungstest soll anhand einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 100$ überprüft werden, ob die Grundgesamtheit normalverteilt ist. Nach Wahl einer geeigneten Klassierung aus 5 Klassen werden dazu zunächst die beiden unbekannten Parameter der Normalverteilung durch eine ML-Schätzung aus den klassierten Daten ermittelt. Damit ist zur Konstruktion des Ablehnungsbereiches die folgende Verteilung zu verwenden:

   (a) χ^2-Verteilung mit 198 Freiheitsgraden ☐

   (b) χ^2-Verteilung mit 197 Freiheitsgraden ☐

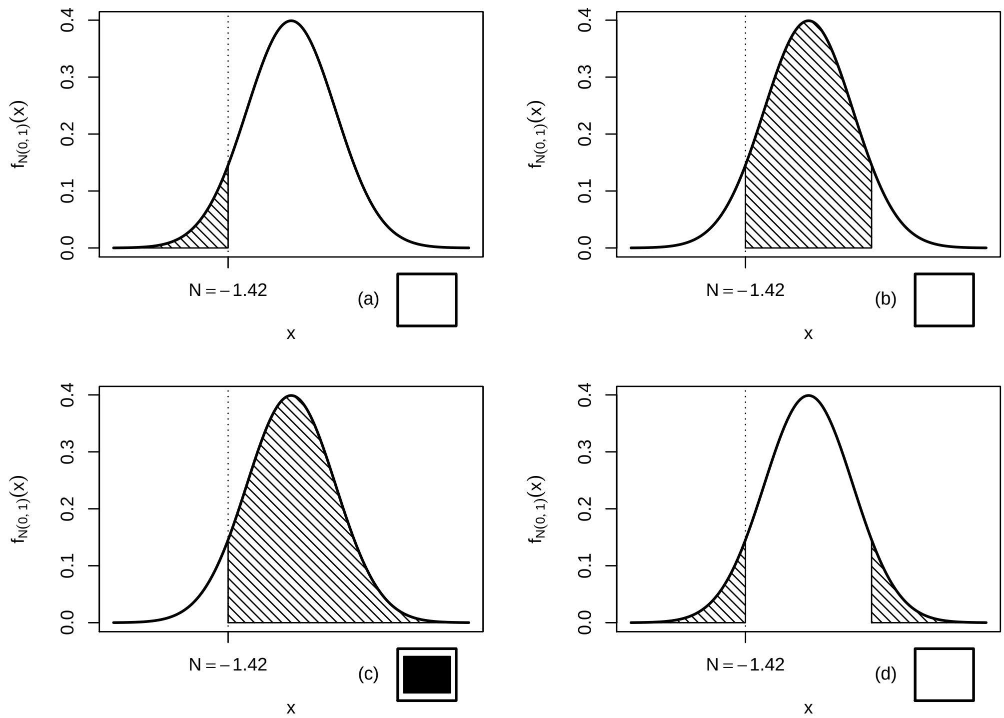
   (c) χ^2-Verteilung mit 3 Freiheitsgraden ☐

   (d) χ^2-Verteilung mit 2 Freiheitsgraden ■

2. Sei $X_1, \ldots, X_{25}$ eine einfache Stichprobe zu einer $N(\mu, \sigma_0^2)$-verteilten Zufallsvariablen Y mit unbekanntem Parameter μ und bekanntem $\sigma_0^2 = 5^2$. Auf der Grundlage einer Stichprobenrealisation zu dieser einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 25$ soll

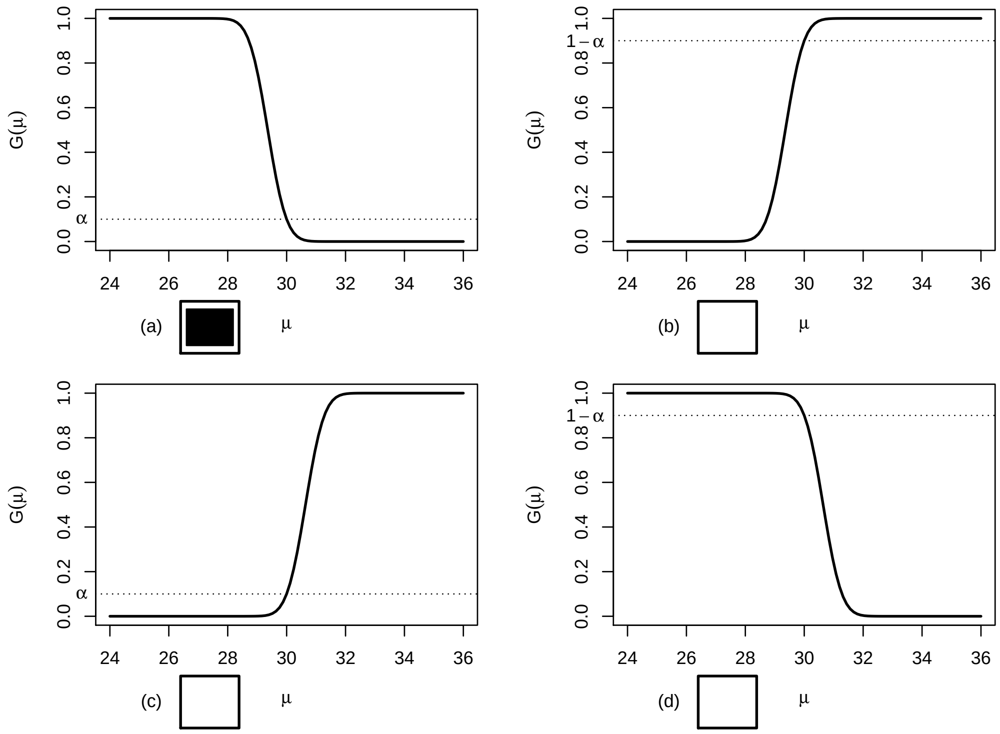
$$H_0 : \mu \leq \mu_0 = 50 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu > \mu_0 = 50$$

   mit einem Gauß-Test getestet werden. Als realisierte Teststatistik erhält man $N = -1.42$. Markieren Sie die Abbildung, welche den p-Wert in der beschriebenen Situation korrekt als Inhalt der schraffierten Fläche unter der Dichtefunktion der Verteilung der Teststatistik unter H_0 (für $\mu = \mu_0$) darstellt.



3. Als p-Wert zur realisierten Teststatistik eines zweiseitigen Gauß-Tests für den Mittelwert einer normalverteilten Grundgesamtheit bei bekannter Varianz erhält man $p = 0.04733$. Dann gilt:
   (a) Die Nullhypothese ist bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.10$ abzulehnen, bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.01$ jedoch nicht abzulehnen. ■
   (b) Die Nullhypothese ist bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.01$ abzulehnen, bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.10$ jedoch nicht abzulehnen. □
   (c) Die Nullhypothese ist sowohl bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.01$ als auch bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.10$ abzulehnen □
   (d) Die Nullhypothese ist weder bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.01$ noch bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.10$ abzulehnen. □

4. Auf der Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_{36}$ vom Umfang $n = 36$ zu einer $N(\mu, 3^2)$-verteilten Zufallsvariablen wird ein Gauß-Test zur Überprüfung der Hypothesen
$$H_0 : \mu \geq 30 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu < 30$$
bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.1$ betrachtet.
Markieren Sie die Abbildung, welche die Gütefunktion des oben genannten Tests korrekt darstellt.



Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für $\lambda > 0$ sei $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$, es gilt also insbesondere $\text{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}$ sowie $\text{Var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$. $X_1, \dots, X_n$ sei für $n \in \mathbb{N}$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y. Untersuchen Sie, ob die Schätzfunktionen

$$T_n(X_1, \dots, X_n) := \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

erwartungstreu für **die Varianz von** Y sind.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

Die Schätzfunktionen $T_n(X_1, \dots, X_n)$ sind erwartungstreu für die Varianz von Y.

Aufgabe 4 (3 + 1 + 6 = 10 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen Y sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $\lambda > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|\lambda) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} \cdot \lambda^{-\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} & \text{für } 0 \leq y \leq \lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter λ soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang n geschätzt werden.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{3}{5} \cdot \lambda$ gilt.

(b) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{\lambda}_{MM}$ nach der Methode der Momente.

(c) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{\lambda}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

Hinweise:

- *Beachten Sie, dass Sie die Teile (b) und (c) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Nachweis durch Berechnung des Erwartungswerts

(b) $\widehat{\lambda}_{MM} = \dfrac{5}{3} \cdot \overline{x}$

(c) $\widehat{\lambda}_{ML} = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$

Aufgabe 5 (7 + 2 + 4 + 3 = 16 Punkte)

Bei der Abfüllung von Kaffeekapseln weiß der Hersteller aus langjähriger Erfahrung, dass die verwendete Maschine eine Standardabweichung von $0.2[g]$ für die abgefüllte Menge hat. Nach einer routinemäßigen Überprüfung hat der Hersteller den Verdacht, dass die Abfüllanlage im Mittel eine andere Menge als die auf dem Produkt ausgezeichneten $7.5[g]$ in die Kapseln einfüllt. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 15 Kapseln entnommen, deren gemessene Füllmengen $x_1, \ldots, x_{15}$ als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 15 zur annahmegemäß $N(\mu, 0.2^2[g^2])$-verteilten Abfüllmenge betrachtet werden können. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

$$\overline{x} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} x_i = 7.369[g] \ .$$

(a) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ **(!)**, ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Berechnen Sie den p-Wert zum Test aus Teil (a).

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art zu dem Test aus Teil (a), falls $\mu = 7.45[g]$ beträgt?

(d) Geben Sie auf Basis der Stichprobenrealisation ein zweiseitiges Konfidenzintervall für die mittlere Abfüllmenge zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ an.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $N = -2.537 \notin (-\infty, -2.576) \cup (2.576, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!

Der Test bestätigt also nicht den Verdacht der Herstellerfirma, dass die von der Maschine abgefüllte Menge im Mittel vom Sollwert abweicht.

(b) $p = 0.011$

(c) $\beta(7.45) = 0.9461$

(d) Realisiertes symm. Konfidenzintervall zum Konf.-niveau $1 - \alpha = 0.95$: $[7.268, 7.47]$

Aufgabe 6 (10 + 8 = 18 Punkte)

Es werde angenommen, dass die (in Kilometern gemessene) Laufleistung Y^A eines aktuell von einer Autovermietung eingesetzten Reifenmodells normalverteilt sei mit unbekanntem Erwartungswert μ_A und unbekannter Varianz σ_A^2. Der Autovermieter erwägt, einen Teil der Fahrzeugflotte in Zukunft mit einem alternativen Reifenmodell auszurüsten, dessen Laufleistung Y^B ebenfalls als normalverteilt (mit unbekanntem Erwartungswert μ_B und unbekannter Varianz σ_B^2) angenommen werden kann. Es soll überprüft werden, ob das alternative Modell im Mittel eine höhere Laufleistung als das aktuell verwendete Modell besitzt.
Aus einem Langzeittest mit $n_A = 12$ Reifensätzen des aktuell verwendeten und $n_B = 15$ Sätzen des alternativen Modells erhielt man Realisationen jeweils voneinander unabhängiger einfacher Stichproben $X_1^A, \ldots, X_{12}^A$ zu Y^A sowie $X_1^B, \ldots, X_{15}^B$ zu Y^B und hieraus die zugehörigen Mittelwerte $\overline{x^A} = 51374$ bzw. $\overline{x^B} = 55882$ sowie die Stichproben**standardabweichungen** $s_{Y^A} = 4763$ bzw. $s_{Y^B} = 5582$.

(a) Testen Sie unter der Annahme $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass das alternative Modell im Mittel eine höhere Laufleistung als das aktuell verwendete Modell besitzt. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$, ob die in Teil (a) getroffene Annahme der Varianzgleichheit auf Grundlage der vorhandenen Stichprobeninformation verworfen werden muss. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

Hinweis: Verwenden Sie für Teil (b) den folgenden Tabellenausschnitt mit 0.95*-Quantilen von* $F(m,n)$*-Verteilungen sowie ggf. die Rechenregel* $F_{m,n;p} = \frac{1}{F_{n,m;1-p}}$.

$n\backslash m$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	2.818	2.788	2.761	2.739	2.719	2.701	2.685	2.671	2.658	2.646
12	2.717	2.687	2.660	2.637	2.617	2.599	2.583	2.568	2.555	2.544
13	2.635	2.604	2.577	2.554	2.533	2.515	2.499	2.484	2.471	2.459
14	2.565	2.534	2.507	2.484	2.463	2.445	2.428	2.413	2.400	2.388
15	2.507	2.475	2.448	2.424	2.403	2.385	2.368	2.353	2.340	2.328
16	2.456	2.425	2.397	2.373	2.352	2.333	2.317	2.302	2.288	2.276
17	2.413	2.381	2.353	2.329	2.308	2.289	2.272	2.257	2.243	2.230
18	2.374	2.342	2.314	2.290	2.269	2.250	2.233	2.217	2.203	2.191
19	2.340	2.308	2.280	2.256	2.234	2.215	2.198	2.182	2.168	2.155
20	2.310	2.278	2.250	2.225	2.203	2.184	2.167	2.151	2.137	2.124

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $t = -2.222 \in (-\infty, -1.708) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Test kann also die Vermutung, dass das alternative Modell im Mittel eine höhere Laufleistung als das aktuell verwendete Modell besitzt, bestätigen.

(b) $F = 0.728 \notin [0, 0.365) \cup (2.565, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!

Der Test findet also keine Anzeichen für eine Verletzung der in Teil (a) angenommenen Varianzgleichheit.

Aufgabe 7 (16 Punkte)

Um zu überprüfen, ob es einen Zusammenhang zwischen der Anzahl bearbeiteter Zusatzübungsblätter und dem Abschneiden in der Klausur (bestanden/nicht bestanden) gibt, hat der Dozent einer Statistik-Veranstaltung aus den Korrekturergebnissen der zugehörigen Klausuren aller 230 Teilnehmer die folgende Tabelle zusammengestellt:

	0 Blätter bearbeitet	1 Blatt bearbeitet	2 Blätter bearbeitet
bestanden	98	35	62
nicht bestanden	29	4	2

Überprüfen Sie anhand dieses Datenmaterials zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ **(!)**, ob die Anzahl bearbeiteter Zusatzübungsblätter und das Klausurergebnis stochastisch unabhängig sind.

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen:

$n \backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	0.455	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	4.351	9.236	11.070	12.833	15.086
6	0.872	1.237	1.635	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

$\chi^2 = 13.709 \in (9.21, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!
Der Test kommt also zum Ergebnis, dass die Anzahl bearbeiteter Zusatzübungsblätter und das Klausurergebnis nicht stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 8 $(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$ Punkte)

Zur Erklärung des Geburtsgewichts y_i (in Gramm) durch den per Ultraschall gemessenen Bauchdurchmesser des Fötus unmittelbar vor der Geburt x_i (in Millimetern) unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),\ i \in \{1, \ldots, n\}$$

Aus Daten einer Geburtenstation wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-679.17 -224.10  -71.86  119.71 1278.14

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -2646.19    1676.46  -1.578   0.1489
x              54.78      17.00   3.222   0.0105 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 524.9 on 9 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5357,	Adjusted R-squared:  0.4841
F-statistic: 10.38 on 1 and 9 DF,  p-value: 0.01045
```

(a) Wie viele Neugeborene gingen in die Schätzung ein?

(b) Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für β_1 und β_2 an.

(c) Geben Sie den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(d) Welcher Anteil der Gesamtvarianz des Geburtsgewichts wird durch das lineare Modell erklärt?

(e) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$, ob β_1 signifikant von Null verschieden ist.

(f) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$, ob β_2 signifikant positiv ist.

(g) Welches Geburtsgewicht prognostiziert das Modell für einen Fötus mit einem Bauchdurchmesser von 110 (in Millimetern)?

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $n = 11$

(b) $\widehat{\beta}_1 = -2646.19$, $\widehat{\beta}_2 = 54.78$

(c) $\widehat{\sigma^2} = 275520.01$

(d) 0.5357

(e) β_1 ist nicht signifikant von Null verschieden.

(f) β_2 ist signifikant positiv.

(g) 3379.61

Aufgabe 9 (6 + 2 + 3 + 5 + 5 = 21 Punkte)

Zur Schätzung eines einfachen linearen Regressionsmodells

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 25$ wurden bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

$$\sum_{i=1}^{25} y_i = 310.622; \quad \sum_{i=1}^{25} y_i^2 = 4578.739; \quad \sum_{i=1}^{25} x_i = 136.053;$$

$$\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 810.846; \quad \sum_{i=1}^{25} x_i \cdot y_i = 1810.876$$

(a) Schätzen Sie β_1 und β_2 mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.

(b) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für σ^2 den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(c) Berechnen Sie $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1}$ und $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2}$.

(d) Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob β_2 signifikant positiv ist. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

(e) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für $\mathrm{E}(y_0)$ gegeben $x_0 = 7.5$ an.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\beta}_1 = 3.1189$, $\widehat{\beta}_2 = 1.71$

(b) $\widehat{\sigma}^2 = 22.3191$

(c) $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1} = 10.2778$, $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2} = 0.31689$

(d) $t = 3.038 \in (1.714, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

β_2 ist also signifikant positiv.

(e) $[12.851, 19.037]$