**Wirtschaftswissenschaftliches**
**Prüfungssekretariat**
Der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
Der Universität Des Saarlandes

**Von der/dem Studierenden auszufüllen** (Bitte leserlich und in Blockschrift):

**Name der Prüfung:** Schließende Statistik

**Semester, dem die Prüfung zugeordnet ist:** SS 2015 (z. B. WS 2015/2016, SS 2016)
(Prüfungen im Februar/April = WS; Prüfungen im August/Oktober = SS)

**Nachname, Vorname der/des Studierenden:** ________________________________________

**Matrikelnummer der/des Studierenden:** ____________________

**Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der für mich geltenden Prüfungsordnung bekannt sind.

Mir ist damit bewusst, dass diese Prüfungsleistung als nicht abgelegt zählt, wenn die hierfür vorgesehenen Zulassungsvoraussetzungen nicht erfüllt sind.

Mir ist bekannt, dass die Teilnahme an der Prüfung zudem die ordnungsgemäße Anmeldung zur Prüfung voraussetzt. Die Teilnahme bei versäumter Anmeldung hat die Ungültigkeit der Prüfung zur Folge.

Zudem ist mir bekannt, dass eine nicht bestandene Prüfung zweimal wiederholt werden kann. Die Wiederholung einer bestandenen Prüfung ist nicht zulässig.

**Datum:** ____________________ **Unterschrift der/des Studierenden:** ____________________

***Von der Prüferin/Vom Prüfer auszufüllen:***

| *Aufgabe* | *Punkte* | *Max. Punkte* | *Bemerkungen* |
|---|---|---|---|
| 1 | | 16 | |
| 2 | | 12 | |
| 3 | | 6 | |
| 4 | | 8 | |
| 5 | | 13 | |
| 6 | | 28 | |
| 7 | | 11 | |
| 8 | | 7 | |
| 9 | | 19 | |
| *Summe* | | 120 | |

◯ *bestanden* *Note:* _____

◯ *nicht bestanden* *Unterschrift der Prüferin/des Prüfers:* ________________________

Klausurheft zur

# Bachelor-Prüfung
# Schliessende Statistik
# Sommersemester 2015

Dr. Martin Becker

## Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 6 + 8 + 13 + 28 + 11 + 7 + 19) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen zur Normal- und $t$-Verteilung finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den Seiten 1–22 berücksichtigt. Das letzte Blatt (Tabellen zur Normal- und $t$-Verteilung) darf abgetrennt werden.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

| **Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aufgabe | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) | (f) | (g) | Σ |
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | |
| Σ | | | | | | | | |

**Aufgabe 1** (16 Punkte)

**Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.**
**Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).**

| | wahr | falsch |
|---|---|---|
| 1. Seien $X_1, \ldots, X_n$ sowie $Y$ normalverteilt mit $$\mathrm{E}(X_1) = \mathrm{E}(X_2) = \ldots = \mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}(Y) \; .$$ Dann ist $X_1, \ldots, X_n$ stets eine einfache Stichprobe vom Umfang $n$ zu $Y$. | ☐ | ☐ |
| 2. Ist eine Familie von Schätzfunktionen $T_n, n \in \mathbb{N}$, konsistent im quadratischen Mittel für einen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist jede dieser Schätzfunktionen auch effizient in der Klasse der für $\lambda$ erwartungstreuen Schätzfunktionen. | ☐ | ☐ |
| 3. Setzt man den aus einer Realisation $x_1, \ldots, x_n$ einer einfachen Stichprobe nach der Momentenmethode erhaltenen Parameterschätzwert in die zugehörige Likelihoodfunktion ein, so ist es möglich, dass man dabei den Wert 0 erhält. | ☐ | ☐ |
| 4. Wird bei einem statistischen Hypothesentest die Nullhypothese beibehalten, obwohl sie falsch ist, handelt es sich um einen Fehler 2. Art. | ☐ | ☐ |
| 5. Gilt bei der Anwendung eines statistischen Tests für den $p$-Wert $p$ zur Teststatistik $T$ die Beziehung $p < \alpha$, so liegt maximal mit Wahrscheinlichkeit $p$ ein Fehler 1. Art vor. | ☐ | ☐ |
| 6. Nimmt ein zweiseitiger Gauß-Test mit $H_0 : \mu = \mu_0$ die Nullhypothese $H_0$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ an, so entscheiden auch die beiden einseitigen Tests mit $H_0 : \mu \leq \mu_0$ bzw. $H_0 : \mu \geq \mu_0$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ stets zu Gunsten der Nullhypothese $H_0$. | ☐ | ☐ |
| 7. Die einfache Varianzanalyse mit 2 Faktorstufen sowie der zweiseitige 2-Stichproben-$t$-Test liefern unter den üblichen Annahmen (unabhängig normalverteilte Zufallsvariablen mit identischen Varianzen) in übereinstimmenden Anwendungssituationen auch stets übereinstimmende Ergebnisse. | ☐ | ☐ |
| 8. Im einfachen linearen Regressionsmodell $$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i, \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),$$ sind die Kleinst-Quadrate-Schätzfunktionen $\widehat{\beta}_1$ und $\widehat{\beta}_2$ linear in $y_i$. | ☐ | ☐ |

## Aufgabe 2 (12 Punkte)

**Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.**
**Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).**

1. Konfidenzintervalle für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen mit bekannter Varianz sind umso breiter,

   (a) je kleiner der Stichprobenumfang und je kleiner das Konfidenzniveau $1-\alpha$ ist. ☐

   (b) je kleiner der Stichprobenumfang und je größer das Konfidenzniveau $1-\alpha$ ist. ☐

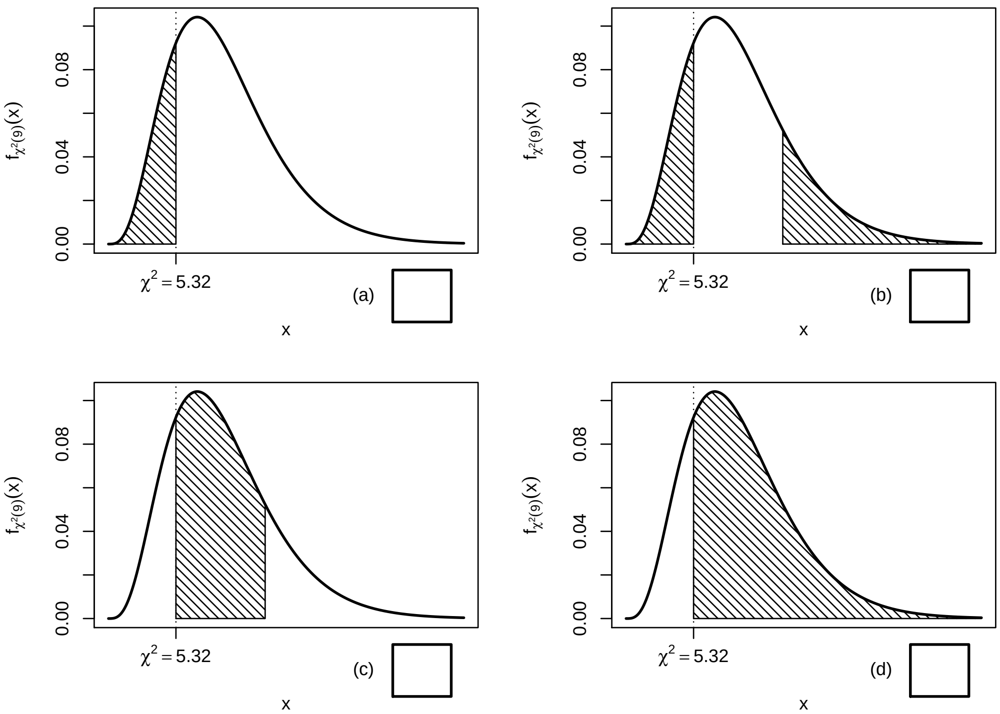
   (c) je größer der Stichprobenumfang und je kleiner das Konfidenzniveau $1-\alpha$ ist. ☐

   (d) je größer der Stichprobenumfang und je größer das Konfidenzniveau $1-\alpha$ ist. ☐

2. Sei $X_1, \ldots, X_{10}$ eine einfache Stichprobe zu einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen $Y$ mit unbekannten Parametern $\mu$ und $\sigma^2$. Auf der Grundlage einer Stichprobenrealisation zu dieser einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 10$ soll

$$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 = 9 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 = 9$$

   mit einem Chi-Quadrat-Test getestet werden. Als realisierte Teststatistik erhält man $\chi^2 = 5.32$. Markieren Sie die Abbildung, welche den $p$-Wert in der beschriebenen Situation korrekt als Inhalt der schraffierten Fläche unter der Dichtefunktion der Verteilung der Teststatistik unter $H_0$ (für $\sigma^2 = \sigma_0^2$) darstellt.



3. Bei der Durchführung eines $t$-Tests für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen bei unbekannter Varianz auf Grundlage einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n$ zum Signifikanzniveau $\alpha$ lehnt der rechtsseitige Test $H_0$ ab, während der zweiseitige Test $H_0$ nicht verwerfen kann. Damit weiß man über die Realisation $t$ der Teststatistik:

(a) $t \in (-\infty, -t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}})$ ☐

(b) $t \in [-t_{n-1,1-\alpha}, t_{n-1,1-\alpha}]$ ☐

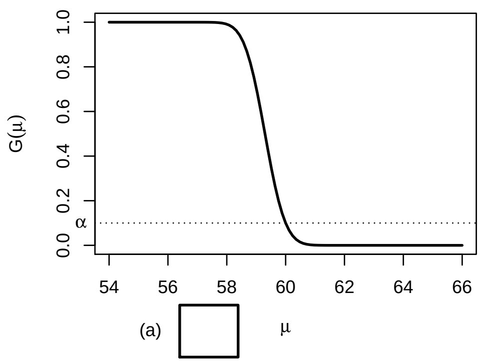
(c) $t \in (t_{n-1,1-\alpha}, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}]$ ☐

(d) $t \in (t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$ ☐

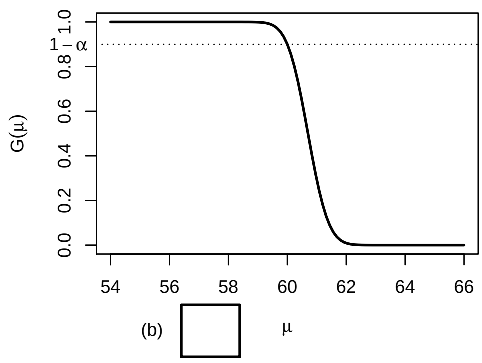
4. Auf der Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_{30}$ vom Umfang $n = 30$ zu einer $N(\mu, 3^2)$-verteilten Zufallsvariablen wird ein Gauß-Test zur Überprüfung der Hypothesen

$$H_0 : \mu \geq 60 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu < 60$$

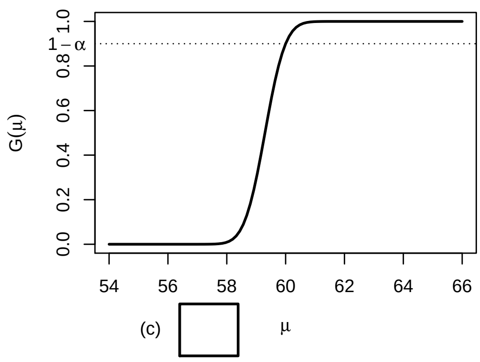
bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.1$ betrachtet.
Markieren Sie die Abbildung, welche die Gütefunktion des oben genannten Tests korrekt darstellt.



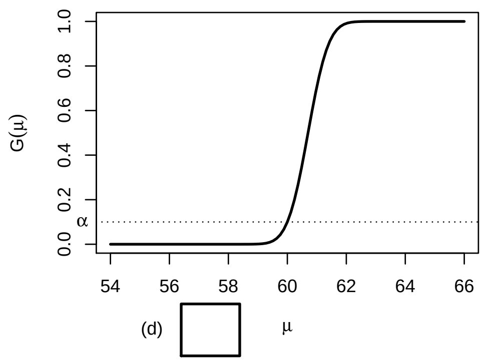

(a) ☐




(b) ☐




(c) ☐




(d) ☐

**Aufgabe 3** (2 + 4 = 6 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen $Y$ sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $\lambda > 0$ eine stetige Gleichverteilung auf dem Intervall $\big[0, \lambda\big]$. Der quadrierte Parameter $\lambda^2$ soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang $n$ geschätzt werden.

(a) Bekanntlich haben auf dem Intervall $[a, b]$ (mit $a < b$) stetig gleichverteilte Zufallsvariablen den Erwartungswert $\frac{a+b}{2}$ sowie die Varianz $\frac{(b-a)^2}{12}$. Bestimmen Sie damit den Erwartungswert und die Varianz von $Y$ in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $\lambda$.

(b) Überprüfen Sie mit Hilfe von Teil (a), ob

$$\widehat{\lambda^2} := 3 \cdot \overline{X^2} = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

erwartungstreu für $\lambda^2$ ist.

**Aufgabe 4** (6 + 2 = 8 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen $Y$ sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $a > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|a) = \begin{cases} a^2 \cdot (y+2) \cdot e^{-a\cdot(y+2)} & \text{für } y > -2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter $a$ soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang $n$ geschätzt werden.

(a) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{a}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

(b) Man kann zeigen, dass $\mathrm{E}(Y) = \frac{2}{a} - 2$ gilt. Bestimmen Sie damit den Schätzer $\widehat{a}_{MM}$ nach der Methode der Momente.

*Hinweise:*

- *Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*

**Aufgabe 5** $(7 + 2 + 4 = 13$ Punkte)

Bei der Abfüllung von Druckgaspatronen weiß der Hersteller aus langjähriger Erfahrung, dass die verwendete Maschine eine Standardabweichung von $2[g]$ für die abgefüllte Menge hat. Nach einer routinemäßigen Überprüfung hat der Hersteller den Verdacht, dass die Abfüllanlage im Mittel weniger als die auf dem Produkt ausgezeichneten $330[g]$ in die Patronen einfüllt. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 20 Patronen entnommen, deren gemessene Füllmengen $x_1, \ldots, x_{20}$ als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 20 zur annahmegemäß $N(\mu, 2^2[g^2])$-verteilten Abfüllmenge betrachtet werden können. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

$$\overline{x} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = 329.141[g] \ .$$

(a) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Berechnen Sie den $p$-Wert zum Test aus Teil (a).

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art zu dem Test aus Teil (a), falls $\mu = 329[g]$ beträgt?

**Aufgabe 6** (11 + 9 + 8 = 28 Punkte)

Um zu überprüfen, ob sich die Leistungsfähigkeit von Alkali-Mangan-Batterien zweier verschiedener Marken unterscheidet, lässt ein Testinstitut die Ausdauer jeweils eines Batteriesatzes in 9 unterschiedlichen Digitalkameramodellen untersuchen. Es wurden dabei die folgenden Aufnahmeanzahlen bis zur automatischen Abschaltung der Kameras festgestellt:

| Kamera $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Marke $A$ $x_i^A$ | 269 | 289 | 278 | 300 | 308 | 311 | 263 | 313 | 288 |
| Marke $B$ $x_i^B$ | 276 | 282 | 254 | 290 | 303 | 287 | 269 | 283 | 275 |

(a) Überprüfen Sie unter der Annahme, dass die gemessenen Aufnahmeanzahlen aus einer einfachen Stichprobe zur zweidimensional normalverteilten Grundgesamtheit $(Y^A, Y^B)$ der Aufnahmeanzahlen mit Batteriemarke $A$ $(Y^A)$ bzw. Batteriemarke $B$ $(Y^B)$ stammen, zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass die Verwendung von Batteriemarke $A$ im Vergleich zu Batteriemarke $B$ durchschnittlich eine höhere Aufnahmeanzahl ermöglicht. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Nehmen Sie nun an, dass durch eine grobe Unachtsamkeit bei der Datenerhebung die Zuordnung der einzelnen Aufnahmeanzahlen zu den jeweiligen Digitalkameramodellen verloren gegangen ist. Um die Situation zu retten, nehme man weiter an, dass mit $X_1^A, \ldots, X_9^A$ und $X_1^B, \ldots, X_9^B$ nun zwei unabhängige einfache Stichproben zu den beiden (normalverteilten) Zufallsvariablen $Y^A$ und $Y^B$ vorliegen. Testen Sie unter der Annahme der Varianzgleichheit von $Y^A$ und $Y^B$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ auf dieser Basis die Hypothese, dass die Verwendung von Batteriemarke $A$ im Vergleich zu Batteriemarke $B$ eine höhere Aufnahmeanzahl ermöglicht. Verwenden Sie hierzu die Stichprobenmittelwerte $\overline{x^A} = 291$ bzw. $\overline{x^B} = 279.89$ sowie die Stichprobenvarianzen $s^2_{Y^A} = 338$ bzw. $s^2_{Y^B} = 191.11$. Fassen Sie das Ergebnis des Tests auch in einem Antwortsatz zusammen.

(c) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$, ob die in Teil (b) getroffene Annahme der Varianzgleichheit auf Grundlage der vorhandenen Stichprobeninformation verworfen werden muss. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

*Hinweis: Verwenden Sie für Teil (c) den folgenden Tabellenausschnitt mit* 0.95*-Quantilen von* $F(m, n)$*-Verteilungen sowie ggf. die Rechenregel* $F_{m,n;p} = \frac{1}{F_{n,m;1-p}}$.

| $n \backslash m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161.448 | 199.500 | 215.707 | 224.583 | 230.162 | 233.986 | 236.768 | 238.883 | 240.543 | 241.882 |
| 2 | 18.513 | 19.000 | 19.164 | 19.247 | 19.296 | 19.330 | 19.353 | 19.371 | 19.385 | 19.396 |
| 3 | 10.128 | 9.552 | 9.277 | 9.117 | 9.013 | 8.941 | 8.887 | 8.845 | 8.812 | 8.786 |
| 4 | 7.709 | 6.944 | 6.591 | 6.388 | 6.256 | 6.163 | 6.094 | 6.041 | 5.999 | 5.964 |
| 5 | 6.608 | 5.786 | 5.409 | 5.192 | 5.050 | 4.950 | 4.876 | 4.818 | 4.772 | 4.735 |
| 6 | 5.987 | 5.143 | 4.757 | 4.534 | 4.387 | 4.284 | 4.207 | 4.147 | 4.099 | 4.060 |
| 7 | 5.591 | 4.737 | 4.347 | 4.120 | 3.972 | 3.866 | 3.787 | 3.726 | 3.677 | 3.637 |
| 8 | 5.318 | 4.459 | 4.066 | 3.838 | 3.687 | 3.581 | 3.500 | 3.438 | 3.388 | 3.347 |
| 9 | 5.117 | 4.256 | 3.863 | 3.633 | 3.482 | 3.374 | 3.293 | 3.230 | 3.179 | 3.137 |
| 10 | 4.965 | 4.103 | 3.708 | 3.478 | 3.326 | 3.217 | 3.135 | 3.072 | 3.020 | 2.978 |

**Aufgabe 7** (11 Punkte)

Mit einem Chi-Quadrat-Anpassungstest soll zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ überprüft werden, ob man bei einem beobachteten Stichprobenergebnis von der Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 100$ zu einer Geom(0.35)-verteilten Zufallsvariablen ausgehen kann. Die Stichprobeninformation liege in Form der folgenden Häufigkeitsverteilung vor:

| $a_i$ | 0 | 1 | 2 | $\geq 3$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 26 | 19 | 13 | 42 |

Führen Sie den beschriebenen Test durch. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

*Hinweise:*

- *Die geometrische Verteilung mit Parameter* $p = 0.35$ *hat den Träger* $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ *und die Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$p_{\text{Geom}(0.35)} : \mathbb{N}_0 \to [0,1]; p_{\text{Geom}(0.35)}(i) = (1 - 0.35)^i \cdot 0.35 \ .$$

- *Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von* $\chi^2(n)$*-Verteilungen:*

| $n\backslash p$ | 0.01 | 0.025 | 0.05 | 0.50 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.000 | 0.001 | 0.004 | 0.455 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 |
| 2 | 0.020 | 0.051 | 0.103 | 1.386 | 4.605 | 5.991 | 7.378 | 9.210 |
| 3 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 2.366 | 6.251 | 7.815 | 9.348 | 11.345 |
| 4 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 3.357 | 7.779 | 9.488 | 11.143 | 13.277 |
| 5 | 0.554 | 0.831 | 1.145 | 4.351 | 9.236 | 11.070 | 12.833 | 15.086 |

**Aufgabe 8** (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 Punkte)

Zur Erklärung der stetigen Wochenrenditen der Beiersdorf-Aktie $y_i$ (in Prozent) durch die stetigen Wochenrenditen des DAX $x_i$ (in Prozent) unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \; i \in \{1, \ldots, n\}$$

Aus Daten der XETRA-Börse der jüngeren Vergangenheit wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.6452 -2.1621  0.1126  1.4974  6.3684

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.07654    0.54402  -0.141   0.8893
x            0.59654    0.33326   1.790   0.0861 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.568 on 24 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.1178,	Adjusted R-squared:  0.08102
F-statistic: 3.204 on 1 and 24 DF,  p-value: 0.08608
```

(a) Wie viele Wochenrenditen gingen in die Schätzung ein?

(b) Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für $\beta_1$ und $\beta_2$ an.

(c) Geben Sie den realisierten Schätzwert für $\sigma^2$ an.

(d) Welcher Anteil der Gesamtvarianz der stetigen Wochenrenditen der Beiersdorf-Aktie wird durch das lineare Modell erklärt?

(e) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen $p$-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$, ob $\beta_1$ signifikant von Null verschieden ist.

(f) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen $p$-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob $\beta_2$ signifikant positiv ist.

(g) Welche stetige Wochenrendite der Beiersdorf-Aktie prognostiziert das Modell in einer Woche mit stetiger DAX-Rendite von 0.6 (in Prozent)?

**Aufgabe 9** (6 + 2 + 3 + 3 + 5 = 19 Punkte)

Zur Schätzung eines einfachen linearen Regressionsmodells

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 20$ wurden bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

$$\sum_{i=1}^{20} y_i = 485.086; \quad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 12174.045; \quad \sum_{i=1}^{20} x_i = 108.964;$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 650.739; \quad \sum_{i=1}^{20} x_i \cdot y_i = 2789.235$$

(a) Schätzen Sie $\beta_1$ und $\beta_2$ mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.

(b) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für $\sigma^2$ den realisierten Schätzwert für $\sigma^2$ an.

(c) Berechnen Sie $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1}$ und $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2}$.

(d) Geben Sie ein symmetrisches Konfidenzintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für $\beta_1$ an.

(e) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für $y_0$ gegeben $x_0 = 4.5$ an.

## Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

| | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |

## $p$-Quantile der Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(N_p) = p$$

| $p$ | 0.85 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 | 0.9995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_p$ | 1.036 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.291 |

## $p$-Quantile der $t(n)$-Verteilungen $t_{n;p}$

$$T \sim t(n) \quad \Rightarrow \quad F_T(t_{n;p}) = p$$

| $n \backslash p$ | 0.85 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 | 0.9995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 636.619 |
| 2 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 31.599 |
| 3 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 12.924 |
| 4 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 8.610 |
| 5 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 6.869 |
| 6 | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.959 |
| 7 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 5.408 |
| 8 | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 5.041 |
| 9 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.781 |
| 10 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.587 |
| 11 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.437 |
| 12 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 4.318 |
| 13 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 4.221 |
| 14 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 4.140 |
| 15 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 4.073 |
| 16 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 4.015 |
| 17 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.965 |
| 18 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.922 |
| 19 | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.883 |
| 20 | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.850 |
| 21 | 1.063 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.819 |
| 22 | 1.061 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.792 |
| 23 | 1.060 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.768 |
| 24 | 1.059 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.745 |
| 25 | 1.058 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.725 |
| 26 | 1.058 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.707 |
| 27 | 1.057 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.690 |
| 28 | 1.056 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.674 |
| 29 | 1.055 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.659 |
| 30 | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.646 |
| 31 | 1.054 | 1.309 | 1.696 | 2.040 | 2.453 | 2.744 | 3.633 |
| 32 | 1.054 | 1.309 | 1.694 | 2.037 | 2.449 | 2.738 | 3.622 |
| 33 | 1.053 | 1.308 | 1.692 | 2.035 | 2.445 | 2.733 | 3.611 |
| 34 | 1.052 | 1.307 | 1.691 | 2.032 | 2.441 | 2.728 | 3.601 |
| 35 | 1.052 | 1.306 | 1.690 | 2.030 | 2.438 | 2.724 | 3.591 |
| 40 | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.551 |
| 60 | 1.045 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 3.460 |
| 80 | 1.043 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.374 | 2.639 | 3.416 |
| 100 | 1.042 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 | 2.626 | 3.390 |
| 120 | 1.041 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 3.373 |
| 140 | 1.040 | 1.288 | 1.656 | 1.977 | 2.353 | 2.611 | 3.361 |
| 160 | 1.040 | 1.287 | 1.654 | 1.975 | 2.350 | 2.607 | 3.352 |
| 180 | 1.039 | 1.286 | 1.653 | 1.973 | 2.347 | 2.603 | 3.345 |
| 200 | 1.039 | 1.286 | 1.653 | 1.972 | 2.345 | 2.601 | 3.340 |
| 250 | 1.039 | 1.285 | 1.651 | 1.969 | 2.341 | 2.596 | 3.330 |