

**WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHES
PRÜFUNGSSEKRETARIAT**

FAKULTÄT FÜR EMPIRISCHE HUMANWISSENSCHAFTEN UND WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFT
DER UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Von der/dem Studierenden auszufüllen (Bitte leserlich und in Blockschrift):

Name der Prüfung: Descriptive Statistics and Probability Calculus

**Semester, dem die
Prüfung zugeordnet ist:** WS 2016/17 (z. B. WS 2015/2016, SS 2016)
(Prüfungen im Februar/April = WS; Prüfungen im August/Oktober = SS)

**Nachname, Vorname
der/des Studierenden:** _____

**Matrikelnummer der/des
Studierenden:** _____

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der für mich geltenden Prüfungsordnung bekannt sind.

Mir ist damit bewusst, dass diese Prüfungsleistung als nicht abgelegt zählt, wenn die hierfür vorgesehenen Zulassungsvoraussetzungen nicht erfüllt sind.

Mir ist bekannt, dass die Teilnahme an der Prüfung zudem die ordnungsgemäße Anmeldung zur Prüfung voraussetzt. Die Teilnahme bei versäumter Anmeldung hat die Ungültigkeit der Prüfung zur Folge.

Zudem ist mir bekannt, dass eine nicht bestandene Prüfung zweimal wiederholt werden kann. Die Wiederholung einer bestandenen Prüfung ist nicht zulässig.

Datum: _____

Unterschrift der/des Studierenden: _____

Von der Prüferin/Vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe	Punkte	Max. Punkte	Bemerkungen
1+2		28	
3		12	
4		19	
5		6	
6		8	
7		18	
8		5	
9		15	
10		9	
Summe		120	

bestanden

Note: _____

nicht bestanden

Unterschrift der Prüferin/des Prüfers: _____

KLAUSURHEFT ZUR
BACHELOR-PRÜFUNG
DESKRIPTIVE STATISTIK UND WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG
WINTERSEMESTER 2016/17

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 10 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte ($= 16 + 12 + 12 + 19 + 6 + 8 + 18 + 5 + 15 + 9$) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf diesen Blättern berücksichtigt.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben						
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Σ
1		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
2		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
3					<input checked="" type="checkbox"/>	
4						
5				<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
6			<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
7						
8				<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
9					<input checked="" type="checkbox"/>	
10				<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
Σ						

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

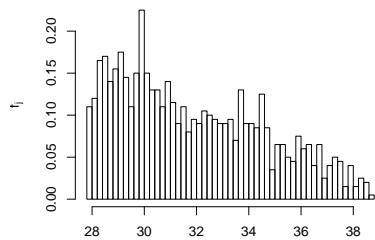
- | | wahr | falsch |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1. Die Summe der Differenzen aller Urlisteneinträge x_i eines kardinalskalierten Merkmals von deren arithmetischem Mittel \bar{x} ist stets 0, es gilt also (falls n die Länge der Urliste bezeichnet) stets $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. In einem Histogramm entspricht die Höhe eines Rechtecks stets der relativen Häufigkeit der zugehörigen Klasse. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Bei linkssteilen (kardinalskalierten) Merkmalen ist der Median tendenziell größer als das arithmetische Mittel. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Die Wahrscheinlichkeit, beim 4-maligen Würfeln mit einem (fairen) Würfel lauter unterschiedliche Punktzahlen zu erhalten, ist größer als 25%. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Es seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B \in \mathcal{F}$ zwei Ereignisse mit $P(A) = 0.5$ und $P(A \cup B) = 1$. Dann gilt stets $P(B) \geq 0.5$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Sind X und Y Zufallsvariablen mit $E(X) = 7$ und $E(Y) = 5$, dann gilt $E(X + Y) = 12$, auch wenn X und Y stochastisch abhängig sind. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7. Die Summe von 4 stochastisch unabhängigen $N(25, 3^2)$ -verteilten Zufallsvariablen ist $N(100, 6^2)$ -verteilt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8. Für die Zufallsvariablen X und Y gelte $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Dann sind X und Y stets stochastisch unabhängig. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.

Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

1. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften das folgende Histogramm *am ehesten* hindeutet:



- (a) leptokurtisch und rechtssteil
- (b) leptokurtisch und linkssteil
- (c) platykurtisch und rechtssteil
- (d) platykurtisch und linkssteil

2. Auf der Bank der Ersatzspieler einer Fußballmannschaft sitzen 7 Spieler. Wenn während des Fußballspiels 3 Ersatzspieler eingewechselt werden und die Reihenfolge der Einwechslungen keine Rolle spielen soll, so beträgt die Anzahl der verschiedenen Einwechslungsmöglichkeiten (für diese Mannschaft) insgesamt:

- (a) $(7)_3 = \frac{7!}{4!}$
- (b) $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!}$
- (c) 7^3
- (d) 3^7

3. Die Ränge $\text{rg}(X)_1, \dots, \text{rg}(X)_8$ zur (der Einfachheit halber sortierten) Urliste

3, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 10

des ordinalskalierten Merkmals X lauten:

- (a) 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5
- (b) 1, 2.5, 2.5, 5, 5, 5, 7, 8
- (c) 1, 2.5, 2.5, 3.5, 3.5, 3.5, 6, 7
- (d) 3, 4.5, 4.5, 6, 6, 6, 7, 10

4. Die Wahrscheinlichkeit, in dieser Klausuraufgabe (4 MC-Aufgabenteile mit jeweils genau einer korrekten Antwort aus 4 Antwortmöglichkeiten) durch *rein zufälliges* Ankreuzen jeweils einer Antwortmöglichkeit (jede Antwortmöglichkeit erhalte also eine Chance von 25%) genau zwei richtige Antworten zu markieren, beträgt (ggf. auf 2 Nachkommastellen gerundet):

- (a) 3.52%
- (b) 12.50%
- (c) 21.09%
- (d) 25.00%

Aufgabe 3 (4 + 1 + 5 + 2 = 12 Punkte)

Zu einem erhobenen Merkmal X sei die folgende empirische Verteilungsfunktion gegeben:

$$F(x) = \begin{cases} 0.00 & \text{für } x < -1 \\ 0.08 & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 0.40 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 0.66 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 0.90 & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ 1.00 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

Außerdem sei die Länge der Urliste $n = 50$ bekannt.

- (a) Erstellen Sie eine Tabelle der absoluten und relativen Häufigkeiten.
- (b) Wie groß ist der Anteil der Urlisteneinträge, die Werte von mindestens 1 annehmen?
- (c) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die empirische Varianz des Merkmals X .
- (d) Bestimmen Sie ein unteres Quartil und ein oberes Quartil des Merkmals X .

Aufgabe 4 (6 + 4 + 3 + 3 + 3 = 19 Punkte)

Zu einem kardinalskalierten Merkmal sei die folgende (zur einfacheren Bearbeitung der Aufgabe bereits sortierte) Urliste der Länge $n = 40$ gegeben:

5.50, 5.91, 8.23, 10.27, 10.52, 10.76, 15.96, 16.39, 16.98, 17.85, 18.83, 19.50, 19.78, 20.57, 23.84, 24.13, 24.39, 24.45, 25.29, 25.89, 27.03, 28.08, 30.87, 31.70, 31.90, 32.67, 38.35, 39.94, 42.31, 44.66, 45.47, 47.02, 47.52, 48.01, 49.10, 50.77, 51.20, 51.33, 52.05, 52.09

- (a) Führen Sie eine Klassierung der erhobenen Daten auf Grundlage der Klassen

$$K_1 = (5, 15], K_2 = (15, 25], K_3 = (25, 40], K_4 = (40, 60]$$

durch. Geben Sie insbesondere die jeweiligen Klassenbreiten, Klassenmitten, absoluten und relativen Klassenhäufigkeiten, Häufigkeitsdichten sowie die Werte der empirischen Verteilungsfunktion an den Klassengrenzen an.

- (b) Stellen Sie die (approximative) empirische Verteilungsfunktion des Merkmals aus der Klassierung der Daten auf.
- (c) Berechnen Sie aus den klassierten Daten den (approximativen) arithmetischen Mittelwert der Daten. Wie groß ist die relative Abweichung vom tatsächlichen (aus der Urliste bestimmten) Mittelwert von 29.678?
- (d) Bestimmen Sie (aus der Urliste) die Anzahl von Merkmalswerten zwischen 10 und 50. Welche Näherung für diese Anzahl können Sie aus der in Teil (b) aufgestellten empirischen Verteilungsfunktion berechnen?
- (e) Bestimmen Sie (unter Verwendung der bekannten Konvention zur eindeutigen Festlegung von Quantilen bei kardinalskalierten Merkmalen) den Median sowohl exakt aus der Urliste als auch approximativ mit Hilfe der Verteilungsfunktion für die klassierten Daten.

Aufgabe 5

(2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Bei der Herstellung von Deckenpaneelen tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% ein Fehler beim Zuschnitt der Paneele auf, mit einer Wahrscheinlichkeit von 3.5% ein Fehler beim Laminieren der Paneele und mit einer Wahrscheinlichkeit von 2.5% sowohl ein Fehler beim Zuschnitt der Paneele als auch ein Fehler beim Laminieren der Paneele. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- (a) höchstens einer der beiden Fehler,
 - (b) mindestens einer der beiden Fehler,
 - (c) ein Fehler beim Zuschnitt der Paneele, aber kein Fehler beim Laminieren der Paneele
- auftritt.

Aufgabe 6 (6 + 2 = 8 Punkte)

Ein Versandhaus beauftragt für den Versand seiner Sendungen einen von insgesamt vier verschiedenen Versand-Dienstleistern A, B, C und D. Dabei werden durchschnittlich 20% der Sendungen an Dienstleister A, 25% der Sendungen an Dienstleister B, 25% der Sendungen an Dienstleister C und 30% der Sendungen an Dienstleister D übergeben. Die umfangreiche Auswertung der vorhandenen Kunden-Feedbacks zu Qualität und Geschwindigkeit der Lieferung ergab, dass 97% der Lieferungen mit Dienstleister A, 96% der Lieferungen mit Dienstleister B, 97% der Lieferungen mit Dienstleister C und 98% der Lieferungen mit Dienstleister D nicht beanstandet werden.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Sendung einen Anlass zur Beanstandung durch den Kunden bietet?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht beanstandete Lieferung mit Dienstleister B versendet wurde?

Aufgabe 7 (5 + 2 + 6 + 1 + 4 = 18 Punkte)

Die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen X sei durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ x - 1 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X .
- (b) Berechnen Sie $P(\{X < -\frac{1}{2}\})$ und $P(\{-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\})$.
- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$.
- (d) Ist X symmetrisch um ihren Erwartungswert verteilt (ohne Begründung)?
- (e) Bestimmen Sie das obere Quartil von X .

Aufgabe 8 (2 + 1 + 2 = 5 Punkte)

Die Wartezeit zwischen zwei Angriffen auf einen Internetrouter lasse sich als eine exponentialverteilte Zufallsvariable auffassen. Im Mittel vergehen zwischen zwei Angriffen 5 Minuten.

- (a) Welche Standardabweichung hat die Wartezeit zwischen zwei Angriffen?
- (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Wartezeit zwischen zwei Angriffen weniger als 10 Minuten?
- (c) Berechnen Sie das 0.90-Quantil der Wartezeit zwischen zwei Angriffen.

Aufgabe 9 (2 + 9 + 1 + 3 = 15 Punkte)

Gegeben sei die folgende Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einem zweidimensionalen diskreten Zufallsvektor (X, Y) :

$X \setminus Y$	-1	0	1	p_i
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	
4	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{24}$	
$p_{\cdot j}$				

- Ergänzen Sie die obige Tabelle (in den vorgesehenen Feldern) um ihre Randverteilungen.
- Berechnen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$, $\text{Cov}(X, Y)$ sowie $\text{Korr}(X, Y)$.
- Sind X und Y stochastisch unabhängig?
- Berechnen Sie $E(2X - 4Y)$ sowie $\text{Var}(2X - 4Y)$.

Aufgabe 10 $(2 + 3 + 4 = 9 \text{ Punkte})$

Ein Online-Händler bietet für 400 der an einem Tag eingehenden Bestellungen einen Express-Lieferservice an, der eine Abfertigung der Bestellung am nächsten Arbeitstag garantiert. Es ist davon auszugehen, dass die Zeitdauern zur Abfertigung einzelner Express-Bestellungen (in Stunden) unabhängig identisch verteilt sind mit einer mittleren Abfertigungsduer von 0.2 Stunden bei einer Standardabweichung von 0.06 Stunden.

- (a) Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat die Summe der Abfertigungsduern von 400 Express-Bestellungen?
- (b) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um die Wahrscheinlichkeit, dass 400 Express-Bestellungen in höchstens 82 (Mitarbeiter-)Stunden abgefertigt werden können, (näherungsweise) zu berechnen.
- (c) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um näherungsweise einen um den zugehörigen Erwartungswert symmetrischen Bereich zu bestimmen, in dem sich die Gesamtabfertigungsduer von 400 Express-Bestellungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 realisiert.

Hinweis: Verwenden Sie zur Bearbeitung der Aufgabenteile (b) und (c) die Tabelle zur Standardnormalverteilung auf Seite 26!

Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998