Wirtschaftswissenschaftliches Prüfungsamt

Bachelor-Prüfung
Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
Wintersemester 2014/15

Aufgabenstellung und Ergebnisse

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Kleben Sie bitte **sofort** Ihr Namensschild auf obige Markierung!
- Die Klausur besteht aus insgesamt 10 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 13 + 16 + 6 + 10 + 7 + 17 + 15 + 8) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf diesen Blättern berücksichtigt.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben					
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	Σ
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
Σ					

Aufgabe 1 (16 Punkte)

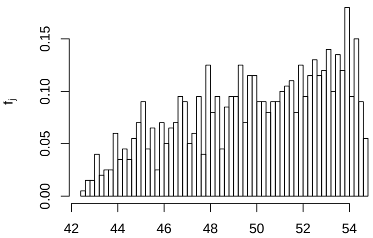
Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

	Aussage	wahr	falsch
1.	Ist $\overline{x}$ der arithmetische Mittelwert des Merkmals X, dann sind stets genauso viele Urlisteneinträge x_i kleiner oder gleich $\overline{x}$ wie größer oder gleich $\overline{x}$.	☐	■
2.	Bei der Bildung der Klassen für die Klassierung eines Merkmals muss stets gewährleistet sein, dass jeder Urlisteneintrag in genau einer Klasse liegt.	■	☐
3.	Sind in einer Klausur mehr männliche als weibliche Prüfungsteilnehmer durchgefallen und haben mehr weibliche als männliche Prüflinge an der Klausur teilgenommen, so kann man daraus stets schließen, dass die Durchfallquote unter den männlichen Prüfungsteilnehmern größer ist als die unter den weiblichen Prüfungsteilnehmern.	■	☐
4.	Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B, C \in \mathcal{F}$ drei Ereignisse mit $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$. Dann gilt stets: $P(A \cup B \cup C) = 1$	☐	■
5.	Die Anzahl der Möglichkeiten, 3 aus 9 unterscheidbaren Objekten auszuwählen, entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, 6 aus 9 unterscheidbaren Objekten auszuwählen.	■	☐
6.	Hat die Verteilungsfunktion F_X einer Zufallsvariablen X mindestens eine Sprungstelle, so kann X nicht stetig verteilt sein.	■	☐
7.	Die Summe von 4 stochastisch unabhängigen $N(10, 2^2)$-verteilten Zufallsvariablen ist $N(40, 8^2)$-verteilt.	☐	■
8.	Die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X, Y)$ zweier Zufallsvariablen X und Y ist betragsmäßig stets größer als der Korrelationskoeffizient $\mathrm{Korr}(X, Y)$ der beiden Zufallsvariablen.	☐	■

Aufgabe 2 (12 Punkte)

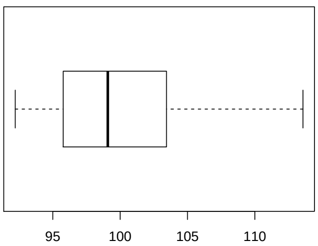
Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.
Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

1. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften das folgende Histogramm *am ehesten* hindeutet:



(a) leptokurtisch und rechts**steil** ☐
(b) leptokurtisch und links**steil** ☐
(c) platykurtisch und rechts**steil** ■
(d) platykurtisch und links**steil** ☐

2. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften der folgende Box-Plot *am ehesten* hindeutet:



(a) leptokurtisch und rechts**steil** ☐
(b) leptokurtisch und links**steil** ☐
(c) platykurtisch und rechts**steil** ☐
(d) platykurtisch und links**steil** ■

3. Verteilungsfunktionen eindimensionaler Zufallsvariablen sind stets

(a) monoton wachsend und rechtsseitig stetig. ■
(b) streng monoton wachsend und rechtsseitig stetig. ☐
(c) monoton wachsend und stetig. ☐
(d) streng monoton wachsend und stetig. ☐

4. Die Wahrscheinlichkeit, in dieser Klausuraufgabe (4 MC-Aufgabenteile mit jeweils genau einer korrekten Antwort aus 4 Antwortmöglichkeiten) durch *rein zufälliges* Ankreuzen jeweils einer Antwortmöglichkeit (jede Antwortmöglichkeit erhalte also eine Chance von 25%) keine einzige richtige Antwort zu markieren, beträgt (ggf. auf 2 Nachkommastellen gerundet):

(a) 25.00% ☐
(b) 31.64% ■
(c) 68.36% ☐
(d) 75.00% ☐

Aufgabe 3 (1 + 4 + 5 + 3 = 13 Punkte)

Zu einem erhobenen Merkmal X sei die folgende empirische Verteilungsfunktion gegeben:

$$F(x) = \begin{cases} 0.000 & \text{für} \quad x < 1 \\ 0.100 & \text{für} \quad 1 \leq x < 3 \\ 0.350 & \text{für} \quad 3 \leq x < 5 \\ 0.575 & \text{für} \quad 5 \leq x < 7 \\ 0.825 & \text{für} \quad 7 \leq x < 9 \\ 0.950 & \text{für} \quad 9 \leq x < 11 \\ 1.000 & \text{für} \quad x \geq 11 \end{cases}$$

Außerdem sei die Länge der Urliste $n = 40$ bekannt.

(a) Geben Sie die Menge A der Merkmalsausprägungen an.

(b) Erstellen Sie eine Tabelle der absoluten und relativen Häufigkeiten.

(c) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die empirische Varianz des Merkmals X.

(d) Bestimmen Sie ein unteres Quartil, ein oberes Quartil und den zugehörigen Interquartilsabstand des Merkmals X.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

(b) Häufigkeitstabelle (mit absoluten und relativen Häufigkeiten):

a_j	1	3	5	7	9	11	Σ
$r(a_j)$	0.100	0.250	0.225	0.250	0.125	0.050	1.000
$h(a_j)$	4	10	9	10	5	2	40

(c) $\overline{x} = 5.4$, $s^2 = 7.24$

(d) $x_{0.25} = 3, x_{0.75} = 7$, IQA: 4

Aufgabe 4 (6 + 4 + 3 + 3 = 16 Punkte)

Zu einem kardinalskalierten Merkmal sei die folgende (zur einfacheren Bearbeitung der Aufgabe bereits sortierte) Urliste der Länge $n = 25$ gegeben:

13.76, 14.18, 14.48, 15.11, 16.27, 19.65, 20.99, 21.98, 25.33, 27.60, 29.75, 30.46, 30.77, 31.74, 33.27, 33.31, 35.26, 35.65, 36.36, 43.75, 45.55, 49.97, 54.53, 61.62, 64.66

(a) Führen Sie eine Klassierung der erhobenen Daten auf Grundlage der Klassen

$$K_1 = (10, 20],\ K_2 = (20, 30],\ K_3 = (30, 45],\ K_4 = (45, 70]$$

durch. Geben Sie insbesondere die jeweiligen Klassenbreiten, Klassenmitten, absoluten und relativen Klassenhäufigkeiten, Häufigkeitsdichten sowie die Werte der empirischen Verteilungsfunktion an den Klassengrenzen an.

(b) Stellen Sie die (approximative) empirische Verteilungsfunktion des Merkmals aus der Klassierung der Daten auf.

(c) Berechnen Sie aus den klassierten Daten den (approximativen) arithmetischen Mittelwert der Daten. Wie groß ist die relative Abweichung vom tatsächlichen (aus der Urliste bestimmten) Mittelwert von 32.24?

(d) Bestimmen Sie (unter Verwendung der bekannten Konvention zur eindeutigen Festlegung von Quantilen bei kardinalskalierten Merkmalen) *das* obere Quartil sowohl exakt aus der Urliste als auch approximativ mit Hilfe der Verteilungsfunktion für die klassierten Daten.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Klassierung:

Nr. j	Klasse $K_j = (k_{j-1}, k_j]$	Klassen-breite b_j	Klassen-mitte m_j	absolute Häufigkeit h_j	relative Häufigkeit $r_j = \frac{h_j}{n}$	Häufigkeits-dichte $f_j = \frac{r_j}{b_j}$	Verteilungs-funktion $F(k_j)$
1	$(10, 20]$	10	15.0	6	0.24	0.0240	0.24
2	$(20, 30]$	10	25.0	5	0.20	0.0200	0.44
3	$(30, 45]$	15	37.5	9	0.36	0.0240	0.80
4	$(45, 70]$	25	57.5	5	0.20	0.0080	1.00

(b) (Approximative) Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \le 10 \\ 0.024 \cdot (x - 10) & \text{für} \quad 10 < x \le 20 \\ 0.24 + 0.02 \cdot (x - 20) & \text{für} \quad 20 < x \le 30 \\ 0.44 + 0.024 \cdot (x - 30) & \text{für} \quad 30 < x \le 45 \\ 0.8 + 0.008 \cdot (x - 45) & \text{für} \quad 45 < x \le 70 \\ 1 & \text{für} \quad x > 70 \end{cases}$$

(c) Mittelwert (näherungsweise): 33.6, relative Abweichung vom exakten Wert: 0.04218 bzw. 4.218%

(d) Oberes Quartil:

- exakt (aus Urliste): 36.36
- approximativ: $42.91\overline{6}$

Aufgabe 5 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Bei der Herstellung von Terrassendielen tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 3% ein Fehler beim Zuschnitt der Dielen auf, mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% ein Fehler beim Fräsen der Dielen und mit einer Wahrscheinlichkeit von 1.5% sowohl ein Fehler beim Zuschnitt der Dielen als auch ein Fehler beim Fräsen der Dielen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) höchstens einer der beiden Fehler,

(b) mindestens einer der beiden Fehler,

(c) ein Fehler beim Zuschnitt der Dielen, aber kein Fehler beim Fräsen der Dielen

auftritt.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $0.985 = 98.5\%$

(b) $0.035 = 3.5\%$

(c) $0.015 = 1.5\%$

Aufgabe 6 (6 + 2 + 2 = 10 Punkte)

Ein Hersteller von Tiefkühlfertiggerichten bezieht seine Frischfischlieferungen von den vier Großhändlern A, B, C und D. Dabei werden einzelne Lieferungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% von Lieferant A, 35% von Lieferant B, 15% von Lieferant C und 10% von Lieferant D geliefert. Bei den anschließenden Qualitätskontrollen gibt es erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% bei Lieferant A, 1.5% bei Lieferant B, 3% bei Lieferant C und 4% bei Lieferant D Anlass zu Beanstandungen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Lieferung in der Qualitätskontrolle nicht beanstandet wird?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine von der Qualitätskontrolle nicht beanstandete Lieferung von Großhändler B geliefert wurde?

(c) Sind die Ereignisse „Lieferung wird beanstandet“ und „Lieferung stammt von Großhändler B“ stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) 0.98225

(b) 0.351

(c) Nein.

Aufgabe 7 (1 + 2 + 2 + 2 = 7 Punkte)

Die Anzahl der Unfälle pro Tag auf einem bestimmten Autobahnabschnitt lasse sich als eine Pois(0.25)-verteilte Zufallsvariable auffassen. Außerdem soll angenommen werden, dass die Anzahl der Unfälle pro Tag auf diesem Autobahnabschnitt für unterschiedliche Tage stochastisch unabhängig ist.

(a) Welchen Erwartungswert hat die Anzahl der Unfälle pro Tag auf diesem Autobahnabschnitt?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ereignen sich an einem Tag auf diesem Autobahnabschnitt 0 Unfälle?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ereignet sich an einem Tag auf diesem Autobahnabschnitt höchstens 1 Unfall?

(d) Welche Verteilung hat die Anzahl der Unfälle pro Woche auf diesem Autobahnabschnitt? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ereignet sich in einer Woche auf diesem Autobahnabschnitt mindestens 1 Unfall?

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\mathrm{E}(X) = 0.25$

(b) 0.7788

(c) 0.9735

(d) 0.82623

Aufgabe 8 (5 + 2 + 6 + 4 = 17 Punkte)

Die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen X sei durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} & \text{für } -1 \le x < 1 \\ -x + 2 & \text{für } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X.

(b) Berechnen Sie $P(\{X < 0\})$ und $P\left(\left\{0 < X < \frac{3}{2}\right\}\right)$.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$.

(d) Bestimmen Sie das obere Quartil von X.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Verteilungsfunktion von X:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le -1 \\ \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} & \text{für } -1 < x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 & \text{für } 1 < x \le 2 \\ 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

(b) $P(\{X < 0\}) = \frac{1}{8}, P\left(\left\{0 < X < \frac{3}{2}\right\}\right) = \frac{3}{4}$

(c) $\mathrm{E}(X) = \frac{5}{6}$

(d) $x_{0.75} = 1.293$

Aufgabe 9 (2 + 9 + 1 + 3 = 15 Punkte)

Gegeben sei die folgende Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einem zweidimensionalen diskreten Zufallsvektor (X, Y):

$X \setminus Y$	1	3	5	$p_{i\cdot}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	
$p_{\cdot j}$				

(a) Ergänzen Sie die obige Tabelle (in den vorgesehenen Feldern) um ihre Randverteilungen.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ sowie $\mathrm{Korr}(X, Y)$.

(c) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

(d) Berechnen Sie $\mathrm{E}(2X - 6Y)$ sowie $\mathrm{Var}(2X - 6Y)$.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Ergänzte Tabelle:

$X \setminus Y$	1	3	5	$p_{i\cdot}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(b) Es gilt: $\mathrm{E}(X) = 3$, $\mathrm{E}(Y) = \frac{5}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = \frac{11}{4}$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = -\frac{5}{6}$, $\mathrm{Korr}(X, Y) = -0.5025$

(c) X und Y sind **nicht** stochastisch unabhängig.

(d) $\mathrm{E}(2 \cdot X - 6 \cdot Y) = -9$, $\mathrm{Var}(2 \cdot X - 6 \cdot Y) = 123$

Aufgabe 10 (2 + 2 + 4 = 8 Punkte)

Ein freiberuflicher Netzwerktechniker benötigt für das Auflegen eines Netzwerkanschlusses im Mittel 16 Minuten bei einer Standardabweichung von 2 Minuten. Man kann davon ausgehen, dass die benötigten Zeitdauern für die einzelnen Anschlüsse nicht gegenseitig voneinander abhängen. In einem bestimmten Schaltschrank sind insgesamt 25 Anschlüsse aufzulegen.

(a) Geben Sie die den Erwartungswert sowie die Standardabweichung der gesamten Arbeitszeit (für alle 25 Netzwerkanschlüsse) an.

(b) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um näherungsweise zu bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Netzwerktechniker nicht länger als 7 Stunden bzw. 420 Minuten zum Auflegen aller Anschlüsse benötigt.

(c) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um näherungsweise ein 0.95-Quantil für die gesamte Arbeitszeit (für alle 25 Anschlüsse) zu bestimmen.

Hinweis: Verwenden Sie zur Bearbeitung von Aufgabenteil (b) und (c) die Tabelle zur Standardnormalverteilung auf Seite 12!

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Erwartungswert: 400, Standardabweichung: 10

(b) Gesuchte (genäherte) Wahrscheinlichkeit: 97.72%

(c) (Genähertes) 0.95-Quantil: 416.4

Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998