Wirtschaftswissenschaftliches Prüfungsamt

Bachelor-Prüfung
Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
Sommersemester 2014

Aufgabenstellung und Ergebnisse

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Kleben Sie bitte **sofort** Ihr Namensschild auf obige Markierung!
- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 14 + 19 + 4 + 10 + 18 + 18 + 9) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf diesen Blättern berücksichtigt.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben

Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Σ
1		■	■	■	■	
2		■	■	■	■	
3					■	
4						
5					■	
6				■	■	
7						
8						
9				■	■	
Σ						

Aufgabe 1 (16 Punkte)

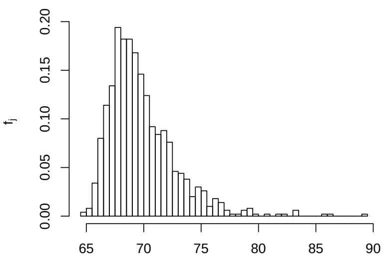
Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Richtige Antworten geben +2 Punkte, falsche Antworten −1 Punkt, nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).
Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!

	Aussage	wahr	falsch
1.	Ist a_{med} ein Median des Merkmals X, dann gibt es keinen (anderen) Merkmalswert, der häufiger als a_{med} in der Urliste zu X vorkommt.	☐	■
2.	Die absoluten Klassenhäufigkeiten von klassierten Merkmalen erhält man stets als Produkt der jeweiligen relativen Klassenhäufigkeit und der Länge der Urliste.	■	☐
3.	Empirische Verteilungsfunktionen F sind stets streng monoton wachsende Funktionen.	☐	■
4.	Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B, C \in \mathcal{F}$ drei Ereignisse mit $P(C) > 0$. Dann gilt stets: $$P(A\|C) + P(B\|C) \geq P(A \cup B\|C)$$	■	☐
5.	Die Wahrscheinlichkeit, beim gleichzeitigen Werfen zweier fairer (6-seitiger) Würfel die Augensumme 3 zu erzielen, beträgt $\frac{1}{18}$.	■	☐
6.	Es sei f_X eine Dichtefunktion zu einer stetigen Zufallsvariablen X. Dann gilt stets: $$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx = 1$$	☐	■
7.	Summen unabhängig identisch $B(1,p)$-verteilter Zufallsvariablen ($p \in (0,1)$) folgen einer Binomialverteilung.	■	☐
8.	Für die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X,Y)$ zweier Zufallsvariablen X und Y über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gilt stets $$-1 \leq \mathrm{Cov}(X,Y) \leq 1\ .$$	☐	■

<u>Aufgabe 2</u> (12 Punkte)

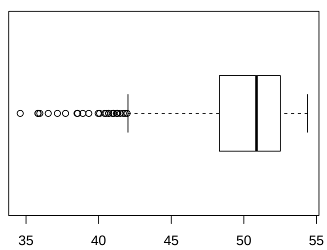
Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.
Richtige Antworten geben +3 Punkte, falsche Antworten −1 Punkt, nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).
Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!

1. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften das folgende Histogramm *am ehesten* hindeutet:



   (a) leptokurtisch und rechts**steil** ☐
   (b) leptokurtisch und links**steil** ■
   (c) platykurtisch und rechts**steil** ☐
   (d) platykurtisch und links**steil** ☐

2. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften der folgende Box-Plot *am ehesten* hindeutet:



   (a) leptokurtisch und rechts**steil** ■
   (b) leptokurtisch und links**steil** ☐
   (c) platykurtisch und rechts**steil** ☐
   (d) platykurtisch und links**steil** ☐

3. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\text{“rot”},\text{“grün”},\text{“blau”}\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und einem **beliebigen** Wahrscheinlichkeitsmaß P. In dieser Situation gilt stets:

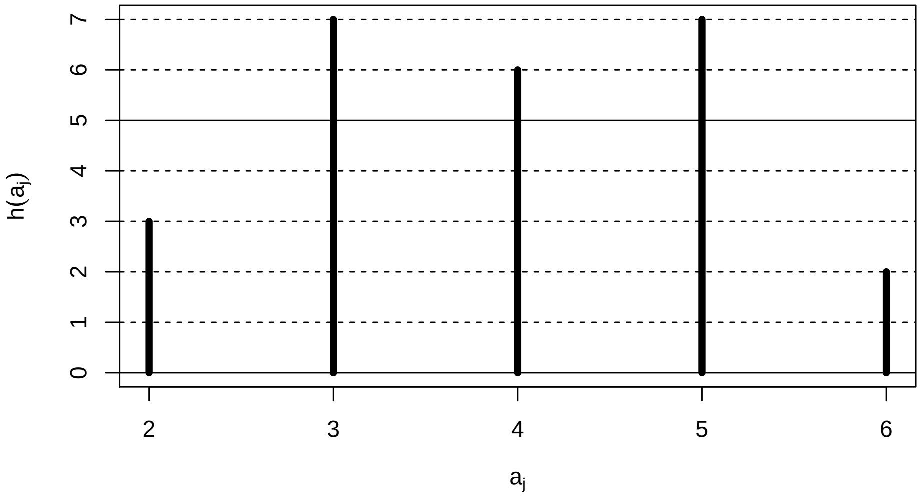
   (a) $P(\{\text{“grün”}\}) = \frac{1}{2} \cdot P(\{\text{“rot”},\text{“blau”}\})$ ☐
   (b) $P(\{\text{“grün”}\}) = P(\{\text{“rot”},\text{“blau”}\})$ ☐
   (c) $P(\{\text{“grün”}\}) + P(\{\text{“rot”},\text{“blau”}\}) < 1$ ☐
   (d) $P(\{\text{“grün”}\}) + P(\{\text{“rot”},\text{“blau”}\}) = 1$ ■

4. Sind X_1, X_2 und X_3 drei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X_1 \sim N(10, 7^2)$, $X_2 \sim N(20, 4^2)$ und $X_3 \sim N(30, 4^2)$, dann ist die Verteilung von $X_1 + X_2 + X_3$ eine

   (a) $N(30, 9^2)$-Verteilung. ☐
   (b) $N(60, 9^2)$-Verteilung. ■
   (c) $N(30, 15^2)$-Verteilung. ☐
   (d) $N(60, 15^2)$-Verteilung. ☐

Aufgabe 3 (4 + 5 + 3 + 2 = 14 Punkte)

Zu einem erhobenen Merkmal X sei das folgende Stabdiagramm gegeben:



(a) Erstellen Sie eine Tabelle der absoluten und relativen Häufigkeiten.

(b) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die empirische Varianz des Merkmals X.

(c) Geben Sie die empirische Verteilungsfunktion des Merkmals X an.

(d) Berechnen Sie ein unteres Quartil und ein oberes Quartil des Merkmals X.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Häufigkeitstabelle (mit absoluten und relativen Häufigkeiten):

a_j	2	3	4	5	6	Σ
$h(a_j)$	3	7	6	7	2	25
$r(a_j)$	0.12	0.28	0.24	0.28	0.08	1.00

(b) $\overline{x} = 3.92$, $s^2 = 1.3536$

(c) Empirische Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0.00 & \text{für} \quad x < 2 \\ 0.12 & \text{für} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0.40 & \text{für} \quad 3 \leq x < 4 \\ 0.64 & \text{für} \quad 4 \leq x < 5 \\ 0.92 & \text{für} \quad 5 \leq x < 6 \\ 1.00 & \text{für} \quad x \geq 6 \end{cases}$$

(d) $x_{0.25} = 3, x_{0.75} = 5$

Aufgabe 4 (6 + 4 + 3 + 3 + 3 = 19 Punkte)

Zu einem kardinalskalierten Merkmal sei die folgende (zur einfacheren Bearbeitung der Aufgabe bereits sortierte) Urliste der Länge $n = 40$ gegeben:

33.31, 37.26, 42.62, 44.80, 51.24, 53.69, 54.20, 56.22, 58.79, 58.82, 59.37, 59.70, 59.72, 62.35, 63.20, 63.96, 64.00, 64.19, 64.21, 65.09, 67.01, 68.27, 68.77, 69.02, 69.33, 70.15, 71.56, 73.12, 73.16, 74.04, 74.60, 74.92, 74.96, 75.39, 75.82, 76.05, 76.90, 77.12, 77.68, 77.94

(a) Führen Sie eine Klassierung der erhobenen Daten auf Grundlage der Klassen

$$K_1 = (20, 40],\ K_2 = (40, 60],\ K_3 = (60, 70],\ K_4 = (70, 80]$$

durch. Geben Sie insbesondere die jeweiligen Klassenbreiten, Klassenmitten, absoluten und relativen Klassenhäufigkeiten, Häufigkeitsdichten sowie die Werte der empirischen Verteilungsfunktion an den Klassengrenzen an.

(b) Stellen Sie die (approximative) empirische Verteilungsfunktion des Merkmals aus der Klassierung der Daten auf.

(c) Berechnen Sie aus den klassierten Daten den (approximativen) arithmetischen Mittelwert der Daten. Wie groß ist die relative Abweichung vom tatsächlichen (aus der Urliste bestimmten) Mittelwert von 64.564?

(d) Bestimmen Sie (aus der Urliste) die Anzahl von Merkmalswerten zwischen 30 und 60. Welche Näherung für diese Anzahl können Sie aus der in Teil (b) aufgestellten empirischen Verteilungsfunktion berechnen?

(e) Bestimmen Sie (unter Verwendung der bekannten Konvention zur eindeutigen Festlegung von Quantilen bei kardinalskalierten Merkmalen) *den* Median sowohl exakt aus der Urliste als auch approximativ mit Hilfe der Verteilungsfunktion für die klassierten Daten.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Klassierung:

Nr. j	Klasse $K_j = (k_{j-1}, k_j]$	Klassen-breite b_j	Klassen-mitte m_j	absolute Häufigkeit h_j	relative Häufigkeit $r_j = \frac{h_j}{n}$	Häufigkeits-dichte $f_j = \frac{r_j}{b_j}$	Verteilungs-funktion $F(k_j)$
1	$(20, 40]$	20	30	2	0.050	0.00250	0.050
2	$(40, 60]$	20	50	11	0.275	0.01375	0.325
3	$(60, 70]$	10	65	12	0.300	0.03000	0.625
4	$(70, 80]$	10	75	15	0.375	0.03750	1.000

(b) (Approximative) Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 20 \\ 0.0025 \cdot (x - 20) & \text{für } 20 < x \leq 40 \\ 0.05 + 0.01375 \cdot (x - 40) & \text{für } 40 < x \leq 60 \\ 0.325 + 0.03 \cdot (x - 60) & \text{für } 60 < x \leq 70 \\ 0.625 + 0.0375 \cdot (x - 70) & \text{für } 70 < x \leq 80 \\ 1 & \text{für } x > 80 \end{cases}$$

(c) Mittelwert (näherungsweise): 62.875, relative Abweichung vom exakten Wert: -0.02616 bzw. -2.616%

(d) Anzahl (aus Urliste): 13
Mit emp. Verteilungsfunktion genäherte Anzahl: 12

(e) Median:

- exakt (aus Urliste): 66.05
- approximativ: $65.8\overline{3}$

Aufgabe 5 $(1 + 1 + 1 + 1 = 4$ Punkte)

Bestimmen Sie die Anzahl verschiedener

(a) 5-stelliger Zahlen, die Sie durch unterschiedliche Anordnung der Ziffern $1, 2, 3, 4, 5$

(b) 4-stelliger Zahlen, die Sie durch unterschiedliche Anordnung der Ziffern $1, 1, 4, 7$

(c) 5-stelliger Zahlen, die Sie durch unterschiedliche Anordnung der Ziffern $3, 3, 3, 5, 5$

(d) 6-stelliger Zahlen, die Sie durch unterschiedliche Anordnung der Ziffern $1, 2, 2, 3, 3, 3$

bilden können.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) 120

(b) 12

(c) 10

(d) 60

Aufgabe 6 (6 + 2 + 2 = 10 Punkte)

Ein Sanitärinstallationsbetrieb verwendet für die Ausführung von Warmwasser-Installationen vier unterschiedlichen Systeme A, B, C und D von verschiedenen Herstellern. Dabei werden Warmwasser-Installationen mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% mit System A, 10% mit System B, 25% mit System C und 25% mit System D ausgeführt. Bei den anschließenden Druckprüfungen gibt es erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% bei System A, 5% bei System B, 4% bei System C und 3% bei System D Undichtigkeiten.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Warmwasser-Installation bei der Druckprüfung undicht ist?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bei der Druckprüfung nicht undichte Installation mit System D ausgeführt wurde?

(c) Sind die Ereignisse „Installation ist undicht“ und „System D wurde verwendet“ stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) 0.0305

(b) 0.2501

(c) Nein.

Aufgabe 7 (5 + 2 + 6 + 1 + 4 = 18 Punkte)

Die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen X sei durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X.

(b) Berechnen Sie $P\left(\left\{X < -\frac{1}{2}\right\}\right)$ und $P\left(\{X > 0\}\right)$.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$.

(d) Ist X symmetrisch um ihren Erwartungswert verteilt (ohne Begründung)?

(e) Bestimmen Sie den Median von X.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Verteilungsfunktion von X:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -1 \\ \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} & \text{für } -1 < x \leq 0 \\ -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

(b) $P\left(\left\{X < -\frac{1}{2}\right\}\right) = \frac{1}{6}, P\left(\{X > 0\}\right) = \frac{1}{3}$

(c) $\mathrm{E}(X) = -\frac{1}{9}$

(d) Nein.

(e) $x_{0.50} = -0.134$

Aufgabe 8 (2 + 3 + 9 + 1 + 3 = 18 Punkte)

Gegeben sei die folgende Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einem zweidimensionalen diskreten Zufallsvektor (X, Y):

$X \setminus Y$	1	2	4	$p_{i\cdot}$
-1	0.05	0.2	0.1	
0	0.1	0.1	0.1	
1	0.1	0.2	0.05	
$p_{\cdot j}$				

(a) Ergänzen Sie die obige Tabelle (in den vorgesehenen Feldern) um ihre Randverteilungen.

(b) Geben Sie die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X unter der Bedingung $Y = y_j$ für alle $y_j \in T(Y)$ über die zugehörigen (bedingten) Wahrscheinlichkeitsfunktionen an.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ sowie $\mathrm{Korr}(X, Y)$.

(d) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

(e) Berechnen Sie $\mathrm{E}(-4X + 3Y)$ sowie $\mathrm{Var}(-4X + 3Y)$.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Ergänzte Tabelle:

$X \setminus Y$	1	2	4	$p_{i\cdot}$
-1	0.05	0.2	0.1	0.35
0	0.1	0.1	0.1	0.3
1	0.1	0.2	0.05	0.35
$p_{\cdot j}$	0.25	0.5	0.25	1

(b) Tabelle der bedingten Wahrscheinlichkeitsfunktionswerte von $X|Y = y_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$:

x_i	-1	0	1
$p_{X\|Y=1}(x_i)$	0.2	0.4	0.4
$p_{X\|Y=2}(x_i)$	0.4	0.2	0.4
$p_{X\|Y=4}(x_i)$	0.4	0.4	0.2

(c) Es gilt: $\mathrm{E}(X) = 0$, $\mathrm{E}(Y) = 2.25$, $\mathrm{Var}(X) = 0.7$, $\mathrm{Var}(Y) = 1.1875$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = -0.15$, $\mathrm{Korr}(X, Y) = -0.1645$

(d) X und Y sind **nicht** stochastisch unabhängig.

(e) $\mathrm{E}(-4 \cdot X + 3 \cdot Y) = 6.75$, $\mathrm{Var}(-4 \cdot X + 3 \cdot Y) = 25.4875$

Aufgabe 9 (2 + 3 + 4 = 9 Punkte)

Ein Online-Händler bietet für 256 der an einem Tag eingehenden Bestellungen einen Express-Lieferservice an, der eine Abfertigung der Bestellung am nächsten Arbeitstag garantiert. Es ist davon auszugehen, dass die Zeitdauern zur Abfertigung einzelner Express-Bestellungen (in Stunden) unabhängig identisch verteilt sind mit einer mittleren Abfertigungsdauer von 0.25 Stunden bei einer Standardabweichung von 0.1 Stunden.

(a) Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat die Summe der Abfertigungsdauern von 256 Express-Bestellungen?

(b) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um die Wahrscheinlichkeit, dass 256 Express-Bestellungen in höchstens 67 (Mitarbeiter-)Stunden abgefertigt werden können, (näherungsweise) zu berechnen.

(c) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um das 95%-Quantil der Gesamtabfertigungsdauer von 256 Express-Bestellungen (näherungsweise) zu bestimmen.

Hinweis: Verwenden Sie zur Bearbeitung von Aufgabenteil (b) und (c) die Tabelle zur Standardnormalverteilung auf Seite 12!

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\mathrm{E}(Y) = 64$, $\sigma_Y = 1.6$.

(b) $P\{Y \leq 67\} \approx 96.99\%$

(c) $y_{0.95} \approx 66.624$

Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998