

Wirtschaftswissenschaftliches Prüfungsamt

BACHELOR-PRÜFUNG

DESKRIPTIVE STATISTIK UND WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG
SOMMERSEMESTER 2013

Namensschild

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Kleben Sie bitte **sofort** Ihr Namensschild auf obige Markierung!
- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte ($= 16 + 12 + 13 + 19 + 7 + 9 + 17 + 18 + 9$) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf diesen Blättern berücksichtigt.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben						
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Σ
1		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
2		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
3					<input type="checkbox"/>	
4						
5					<input type="checkbox"/>	
6				<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
7					<input type="checkbox"/>	
8						
9				<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Σ						

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Richtige Antworten geben +2 Punkte, falsche Antworten -1 Punkt, nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!

- | | wahr | falsch |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1. Die Ausprägungen ordinalskalierter Merkmale sind stets (reelle) Zahlen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Die relativen Klassenhäufigkeiten von klassierten Merkmalen erhält man stets als Produkt der jeweiligen Häufigkeitsdichte und der zugehörigen Klassenbreite. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt für Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$ stets $P(A B) = P(B A)$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Es seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B, C \in \mathcal{F}$ drei Ereignisse mit $P(C) > 0$. Dann gilt: | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

$$P(A) < P(B) \quad \Rightarrow \quad P(A|C) < P(B|C)$$

- | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 5. Wenn Sie alle 8 Aufgabenteile dieser Aufgabe rein zufällig mit <i>wahr</i> oder <i>falsch</i> beantworten, dann haben Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|---|--------------------------|--------------------------|

$$\binom{8}{4} \cdot 0.5^4 \cdot (1 - 0.5)^{8-4} \approx 27.34\%$$

genau 4 Aufgabenteile korrekt beantwortet.

- | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 6. Es seien X und Y zwei unkorrelierte Zufallsvariablen mit $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 10$. Dann gilt $\text{Var}(3 \cdot X - 2 \cdot Y) = 50$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7. Für die Zufallsvariablen X und Y gelte $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$. Dann sind X und Y nicht stochastisch unabhängig. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8. Summen stochastisch unabhängig normalverteilter Zufallsvariablen sind stets wieder normalverteilt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

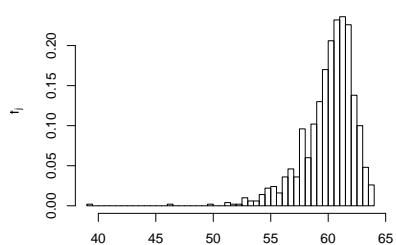
Aufgabe 2 (12 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.

Richtige Antworten geben +3 Punkte, falsche Antworten -1 Punkt, nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

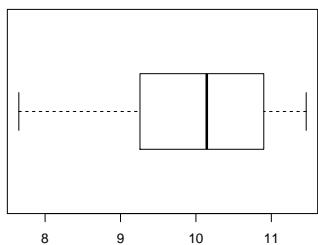
Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!

1. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften das folgende Histogramm *am ehesten* hindeutet:



- (a) leptokurtisch und rechtssteil
- (b) leptokurtisch und linkssteil
- (c) platykurtisch und rechtssteil
- (d) platykurtisch und linkssteil

2. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften der folgende Box-Plot *am ehesten* hindeutet:



- (a) leptokurtisch und rechtssteil
- (b) leptokurtisch und linkssteil
- (c) platykurtisch und rechtssteil
- (d) platykurtisch und linkssteil

3. Das Merkmal X des zweidimensionalen Merkmals (X, Y) sei ordinalskaliert, das Merkmal Y kardinalskaliert. Damit ist die Berechnung folgender Abhängigkeitsmaße zwischen X und Y immer möglich:

- (a) Nur Spearmanscher Rangkorrelationskoeffizient
- (b) Nur korrigierter Pearsonscher Kontingenzkoeffizient
- (c) Pearsonscher Korrelationskoeffizient und korrigierter Pearsonscher Kontingenzkoeffizient
- (d) Spearmanscher Rangkorrelationskoeffizient und korrigierter Pearsonscher Kontingenzkoeffizient

4. Die Anzahl der verschiedenen 4-stelligen Zahlen, die aus den Ziffern 1, 1, 4 und 7 gebildet werden können (eine der möglichen Zahlen ist also 4711), beträgt:

(a) $\frac{1147!}{1! \cdot 1! \cdot 4! \cdot 7!}$

(b) $\frac{13!}{1! \cdot 1! \cdot 4! \cdot 7!}$

(c) $\frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!}$

(d) $\frac{13!}{2! \cdot 1! \cdot 1!}$

Aufgabe 3 (1 + 4 + 5 + 3 = 13 Punkte)

Zu einem erhobenen Merkmal X sei die folgende empirische Verteilungsfunktion gegeben:

$$F(x) = \begin{cases} 0.00 & \text{für } x < 2 \\ 0.08 & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ 0.26 & \text{für } 3 \leq x < 4 \\ 0.66 & \text{für } 4 \leq x < 5 \\ 0.88 & \text{für } 5 \leq x < 6 \\ 1.00 & \text{für } x \geq 6 \end{cases}$$

Außerdem sei die Länge der Urliste $n = 50$ bekannt.

- (a) Geben Sie die Menge A der Merkmalsausprägungen an.
- (b) Erstellen Sie eine Tabelle der absoluten und relativen Häufigkeiten.
- (c) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die empirische Varianz des Merkmals X .
- (d) Berechnen Sie ein unteres Quartil, ein oberes Quartil und den zugehörigen Interquartilsabstand des Merkmals X .

Aufgabe 4 (6 + 4 + 3 + 3 + 3 = 19 Punkte)

Zu einem kardinalskalierten Merkmal sei die folgende (zur einfacheren Bearbeitung der Aufgabe bereits sortierte) Urliste der Länge $n = 30$ gegeben:

2.64, 3.96, 4.10, 7.47, 8.03, 9.01, 10.67, 12.58, 12.98, 13.24, 14.30, 14.41, 16.92, 17.60, 17.85, 20.08, 20.47, 21.52, 22.59, 26.68, 28.26, 29.03, 29.69, 32.04, 32.57, 33.02, 37.81, 41.18, 41.97, 56.94

- (a) Führen Sie eine Klassierung der erhobenen Daten auf Grundlage der Klassen

$$K_1 = (0, 10], K_2 = (10, 20], K_3 = (20, 40], K_4 = (40, 60]$$

durch. Geben Sie insbesondere die jeweiligen Klassenbreiten, Klassenmitten, absoluten und relativen Klassenhäufigkeiten, Häufigkeitsdichten sowie die Werte der empirischen Verteilungsfunktion an den Klassengrenzen an.

- (b) Stellen Sie die (approximative) empirische Verteilungsfunktion des Merkmals aus der Klassierung der Daten auf.
- (c) Berechnen Sie aus den klassierten Daten den (approximativen) arithmetischen Mittelwert der Daten. Wie groß ist die relative Abweichung vom tatsächlichen (aus der Urliste bestimmten) Mittelwert von 21.32?
- (d) Bestimmen Sie (aus der Urliste) die Anzahl von Merkmalswerten zwischen 20 und 50. Welche Näherung für diese Anzahl können Sie aus der in Teil (b) aufgestellten empirischen Verteilungsfunktion berechnen?
- (e) Bestimmen Sie (unter Verwendung der bekannten Konvention zur eindeutigen Festlegung von Quantilen bei kardinalskalierten Merkmalen) das obere Quartil sowohl exakt aus der Urliste als auch approximativ mit Hilfe der Verteilungsfunktion für die klassierten Daten.

Aufgabe 5 (1 + 2 + 2 + 2 = 7 Punkte)

Eine Urne enthält 100 Kugeln, von denen 15 rot und kariert, 20 braun und kariert, 25 rot und gepunktet sowie 40 braun und gepunktet sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- (a) eine rein zufällig aus der Urne entnommene Kugel rot und kariert ist?
- (b) eine rein zufällig aus der Urne entnommene Kugel braun ist?
- (c) eine rein zufällig aus der Urne entnommene Kugel gepunktet ist, wenn man weiß, dass sie braun ist?
- (d) bei dreimaligem rein zufälligen Ziehen *mit Zurücklegen* die erste Kugel rot, die zweite Kugel braun und die letzte Kugel kariert ist?

Aufgabe 6 (6 + 2 + 1 = 9 Punkte)

In einer Abteilung einer Finanzbehörde werden eingehende Einkommenssteuererklärungen zufällig auf die Mitarbeiter A, B, C und D aufgeteilt. Aufgrund unterschiedlicher Ausführungsgeschwindigkeiten werden 35% der Erklärungen von Mitarbeiter A, 15% der Erklärungen von Mitarbeiter B, 20% der Erklärungen von Mitarbeiter C und 30% der Erklärungen von Mitarbeiter D bearbeitet. Gegen die ausgestellten Steuerbescheide werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% bei Mitarbeiter A, 20% bei Mitarbeiter B, 15% bei Mitarbeiter C und 5% bei Mitarbeiter D erfolgreich Einsprüche eingelegt.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass gegen einen zufällig ausgewählten Einkommenssteuerbescheid ein erfolgreicher Einspruch eingelegt wird?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein nicht (erfolgreich) per Einspruch beanstandeter Einkommenssteuerbescheid von Mitarbeiter A ausgestellt wurde?
- (c) Sind die Ereignisse „Bescheid wird erfolgreich beanstandet“ bzw. „Mitarbeiter A hat den Bescheid erstellt“ stochastisch unabhängig?

Aufgabe 7 (5 + 2 + 6 + 4 = 17 Punkte)

Die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen X sei durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}x + \frac{1}{4} & \text{für } -4 \leq x < 0 \\ -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X .
- (b) Berechnen Sie $P(\{X < -1\})$ und $P(\{0 < X < 1\})$.
- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$.
- (d) Bestimmen Sie das obere Quartil von X .

Aufgabe 8 (2 + 3 + 9 + 1 + 3 = 18 Punkte)

Gegeben sei die folgende Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einem zweidimensionalen diskreten Zufallsvektor (X, Y) :

$X \setminus Y$	-1	0	2	p_i
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	
5	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	
$p_{\cdot j}$				

- (a) Ergänzen Sie die obige Tabelle (in den vorgesehenen Feldern) um ihre Randverteilungen.
- (b) Geben Sie die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Y unter der Bedingung $X = x_i$ für alle $x_i \in T(X)$ über die zugehörigen (bedingten) Wahrscheinlichkeitsfunktionen an.
- (c) Berechnen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$, $\text{Cov}(X, Y)$ sowie $\text{Korr}(X, Y)$.
- (d) Sind X und Y stochastisch unabhängig?
- (e) Berechnen Sie $E(-2X + 4Y)$ sowie $\text{Var}(-2X + 4Y)$.

Aufgabe 9 (1 + 4 + 4 = 9 Punkte)

Bei einer Fluggesellschaft weiß man, dass im Mittel 15% derjenigen Personen, die sich einen Platz für einen Flug auf einer bestimmten Route reservieren lassen, zum Abflug nicht erscheinen. Um die Zahl der ungenutzten Plätze nicht zu groß werden zu lassen, werden daher für einen 255-sitzigen Jet mehr als 255 Platzreservierungen angenommen.

- (a) Wie ist die Anzahl Y der tatsächlich erscheinenden Passagiere verteilt, wenn insgesamt 280 Platzreservierungen angenommen wurden und davon ausgegangen werden kann, dass das (Nicht-)Erscheinen der einzelnen Passagiere voneinander unabhängig ist?
- (b) Berechnen Sie unter Verwendung des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 280 angenommenen Reservierungen alle erscheinenden Passagiere einen Platz im Flugzeug erhalten.
- (c) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um näherungsweise (bei 280 angenommenen Reservierungen) ein 0.95-Quantil der Anzahl der tatsächlich zum Flug erscheinenden Passagiere Y zu bestimmen.

Hinweis: Verwenden Sie zur Bearbeitung von Aufgabenteil (b) und (c) die Tabelle zur Standardnormalverteilung auf Seite 23!

Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998