Wirtschaftswissenschaftliches Prüfungsamt

Bachelor-Prüfung
Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
Sommersemester 2011

Namensschild

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Kleben Sie bitte **sofort** Ihr Namensschild auf obige Markierung!
- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 14 + 16 + 7 + 7 + 25 + 13 + 10) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf diesen Blättern berücksichtigt.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben

Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	Σ
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
Σ					

Aufgabe 1 (16 Punkte)

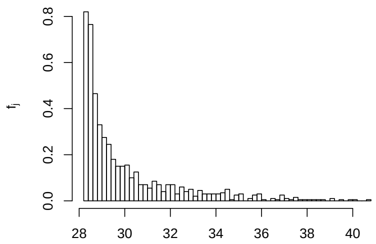
Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Richtige Antworten geben +2 Punkte, falsche Antworten −1 Punkt, nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).
Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!

	wahr	falsch
1. Ist a_{mod} Modus des Merkmals X, dann gibt es keinen (anderen) Merkmalswert, der häufiger als a_{mod} in der Urliste zu X vorkommt.	☐	☐
2. Empirische Verteilungsfunktionen F (von nicht klassierten Merkmalen) sind stets Treppenfunktionen, deren Sprungstellen durch die m Merkmalsausprägungen $a_1, \ldots, a_m$ des zugehörigen Merkmals gegeben sind.	☐	☐
3. Ist $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum, so sind zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ genau dann stochastisch unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ gilt.	☐	☐
4. Ist $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und sind $A, B \in \mathcal{F}$ mit $0 < P(B) < 1$, so gilt stets: $$P(A\|B) + P(A\|\overline{B}) = 1$$	☐	☐
5. Wenn Sie alle 8 Aufgabenteile dieser Aufgabe bearbeiten, dann haben Sie 8! Möglichkeiten für die Reihenfolge der Bearbeitung.	☐	☐
6. Ist X eine stetige Zufallsvariable mit existierendem Erwartungswert und f_X eine Dichtefunktion von X, so gilt stets: $$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx$$	☐	☐
7. Sind X und Y unkorrelierte Zufallsvariablen, so gilt stets $$\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y) .$$	☐	☐
8. Sind X und Y Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}(X) = 2$ und $\mathrm{E}(Y) = 3$, dann gilt $\mathrm{E}(X + Y) = 5$, auch wenn X und Y stochastisch abhängig sind.	☐	☐

Aufgabe 2 (12 Punkte)

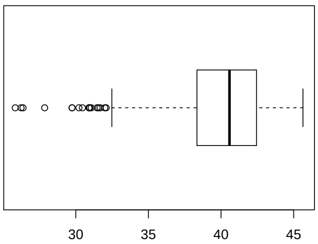
Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.
Richtige Antworten geben +3 Punkte, falsche Antworten −1 Punkt, nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).
Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!

1. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften das folgende Histogramm *am ehesten* hindeutet:



(a) leptokurtisch und linksschief ☐
(b) leptokurtisch und rechtsschief ☐
(c) platykurtisch und linksschief ☐
(d) platykurtisch und rechtsschief ☐

2. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften der folgende Box-Plot *am ehesten* hindeutet:



(a) leptokurtisch und linksschief ☐
(b) leptokurtisch und rechtsschief ☐
(c) platykurtisch und linksschief ☐
(d) platykurtisch und rechtsschief ☐

3. Sind X und Y zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim B(10, 0.3)$ und $Y \sim B(10, 0.3)$, dann ist die Verteilung von $X + Y$ eine

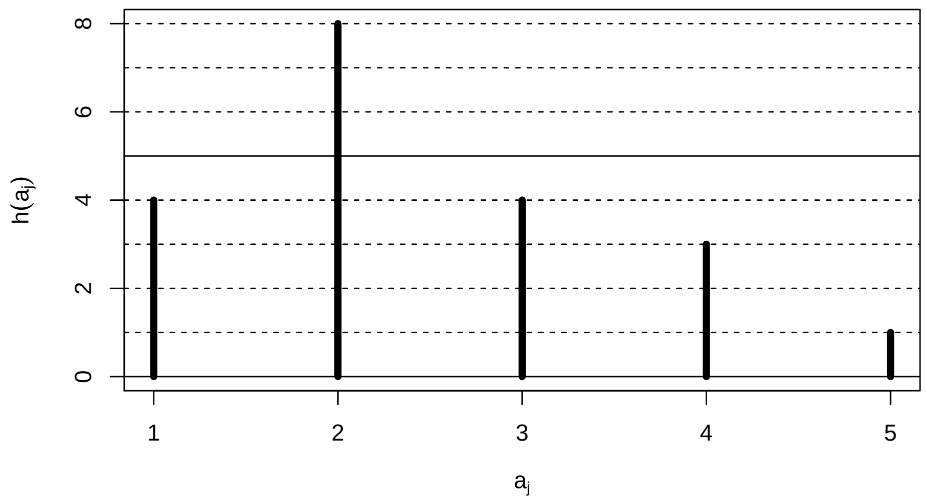
(a) $B(10, 0.3)$-Verteilung. ☐
(b) $B(10, 0.6)$-Verteilung. ☐
(c) $B(20, 0.3)$-Verteilung. ☐
(d) $B(20, 0.6)$-Verteilung. ☐

4. Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig identisch verteilt mit $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt für $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

(a) $\mathrm{E}(\overline{X}) = \frac{\mu}{n}$ und $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$. ☐
(b) $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu$ und $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$. ☐
(c) $\mathrm{E}(\overline{X}) = \frac{\mu}{n}$ und $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2$. ☐
(d) $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu$ und $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2$. ☐

Aufgabe 3 (4 + 5 + 3 + 2 = 14 Punkte)

Zu einem erhobenen Merkmal X sei das folgende Stabdiagramm gegeben:



(a) Erstellen Sie eine Tabelle der absoluten und relativen Häufigkeiten.

(b) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die empirische Varianz des Merkmals X.

(c) Geben Sie die empirische Verteilungsfunktion des Merkmals X an.

(d) Geben Sie den Median/die Mediane von X an.

Aufgabe 4 $(6 + 3 + 4 + 3 = 16$ Punkte)

Zu einem kardinalskalierten Merkmal sei die folgende (zur einfacheren Bearbeitung der Aufgabe bereits sortierte) Urliste der Länge $n = 25$ gegeben:

> 7.66, 11.45, 11.58, 12.41, 14.98, 16.49, 17.34, 21.09, 24.44, 25.22, 27.28, 27.83, 28.04, 33.42, 33.66, 36.36, 36.40, 38.90, 39.54, 43.86, 45.17, 47.99, 52.51, 54.38, 57.80

(a) Führen Sie eine Klassierung der erhobenen Daten auf Grundlage der Klassen

$$K_1 = (5, 15],\ K_2 = (15, 25],\ K_3 = (25, 45],\ K_4 = (45, 65]$$

durch. Geben Sie insbesondere die jeweiligen Klassenbreiten, Klassenmitten, absoluten und relativen Klassenhäufigkeiten, Häufigkeitsdichten sowie die Werte der empirischen Verteilungsfunktion an den Klassengrenzen an.

(b) Berechnen Sie aus den klassierten Daten den (approximativen) arithmetischen Mittelwert der Daten. Wie groß ist die relative Abweichung vom tatsächlichen (aus der Urliste bestimmten) Mittelwert von 30.632?

(c) Stellen Sie die (approximative) empirische Verteilungsfunktion des Merkmals aus der Klassierung der Daten auf.

(d) Bestimmen Sie (aus der Urliste) die Anzahl von Merkmalswerten zwischen 25 und 60. Welche Näherung für diese Anzahl können Sie aus der in Teil (c) aufgestellten empirischen Verteilungsfunktion berechnen?

Aufgabe 5 (5 + 2 = 7 Punkte)

Ein großer Onlineshop verschickt 40% seiner Sendungen mit der Avanti GmbH, 35% seiner Sendungen mit der Blitzschnell AG sowie 25% seiner Sendungen mit der CargoExpress KG. Aufgrund langjähriger Erfahrungen aus dem Qualitätsmanagement ist bekannt, dass es bei 3% aller mit der Avanti GmbH, bei 4% aller mit der Blitzschnell AG sowie bei 6% aller mit der CargoExpress KG verschickten Lieferungen zu einem Transportschaden kommt.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufällig ausgewählten Sendung ein Transportschaden auftritt?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sendung, die beim Kunden mit einem Transportschaden angeliefert wird, mit der Blitzschnell AG versendet wurde?

Aufgabe 6 (3 + 2 + 2 = 7 Punkte)

Bei einem bekannten Brettspiel muss (mit einem fairen Würfel) zunächst eine Sechs gewürfelt werden, um eine Spielfigur auf das Startfeld des (eigentlichen) Spielfeldes zu stellen. Dazu hat man zu Beginn des Spiels (bevor man die erste Sechs gewürfelt hat) jeweils bis zu 3 Versuche pro Runde.

(a) Wie oft muss man im Mittel würfeln (einschließlich des erfolgreichen Wurfs!), bis man zum ersten Mal eine Sechs gewürfelt hat?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bereits in der ersten Runde (also nach spätestens 3 Würfen) eine Sechs gewürfelt hat?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man auch nach 2 Runden (also insgesamt 6 Würfen) noch keine Sechs gewürfelt hat?

Aufgabe 7 (6 + 2 + 12 + 5 = 25 Punkte)

Die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen X sei durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_X(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(b) Berechnen Sie $P(\{X < -\frac{1}{2}\})$ sowie $P(\{X > \frac{1}{2}\})$.

(c) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

(d) Bestimmen Sie einen Median sowie ein oberes Quartil von X.

Aufgabe 8 (4 + 2 + 4 + 3 = 13 Punkte)

Gegeben sei die folgende Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einem zweidimensionalen diskreten Zufallsvektor (X, Y):

$X \setminus Y$	2	4	6
1	0.05	0.1	0.1
2	0.1	0.2	0.2
3	0.1	0.1	0.05

(a) Geben Sie die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Y unter der Bedingung $X = x_i$ für alle $x_i \in T(X)$ über die zugehörigen (bedingten) Wahrscheinlichkeitsfunktionen an.

(b) Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Berechnen Sie unter Verwendung der Ergebnisse

$$\mathrm{E}(X) = 2, \quad \mathrm{E}(Y) = 4.2, \quad \mathrm{E}(X^2) = 4.5, \quad \mathrm{E}(Y^2) = 20, \quad \mathrm{E}(X \cdot Y) = 8.2$$

die Varianzen von X und Y sowie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten zwischen X und Y.

(d) Berechnen Sie $\mathrm{E}(2X - 3Y)$ sowie $\mathrm{Var}(2X - 3Y)$.

Aufgabe 9 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte)

Auf der Grundlage vergangener Geschäftszahlen weiß man, dass die täglichen Umsätze einer Tankstelle (in [10 000 €]) zufällig mit einer Standardabweichung von 1 um ihren Erwartungswert 3 schwanken. Im Jahr 2011 wird die Tankstelle insgesamt an 324 Tagen geöffnet sein. Es soll angenommen werden, dass die Umsätze an den einzelnen Öffnungstagen stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind. Man ist auf dieser Grundlage an dem gesamten Jahresumsatz für 2011 (als Summe der einzelnen Tagesumsätze) interessiert.

(a) Geben Sie Erwartungswert und Standardabweichung des Jahresumsatzes für 2011 an.

(b) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Jahresumsatz 2011 zwischen 945 und 990 (in [10 000 €]) liegt.

(c) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um das obere Quartil des Jahresumsatzes für 2011 zu bestimmen.

Hinweis: Verwenden Sie zur Bearbeitung von Aufgabenteil (b) und (c) die Tabelle zur Standardnormalverteilung auf Seite 23!

Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998