Universität des Saarlandes
Lehrstab Statistik
apl. Prof. Dr. Martin Becker

6. Übungsblatt zur Vorlesung
Schließende Statistik WS 2025/26

Aufgabe 19

Bei der Herstellung von Desinfektionsspray weiß man aus langjähriger Erfahrung, dass die verwendete Abfüllanlage eine Varianz von $2^2 = 4[ml^2]$ für die abgefüllte Flüssigkeitsmenge hat. Nach einer Inventur hat der Hersteller den Verdacht, dass die Justierung der Abfüllanlage fehlerhaft ist und der tatsächliche Mittelwert der Abfüllmenge von der eingestellten und auf dem Produkt angegebenen Sollmenge von $100[ml]$ abweicht. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 25 Flaschen entnommen, deren gemessene Füllmengen $x_1, \ldots, x_{25}$ als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 25 zur annahmegemäß $N(\mu, 2^2[ml^2])$-verteilten Abfüllmenge betrachtet werden kann. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

$$\overline{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = 100.837[ml] \ .$$

(a) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Ab welchem Abstand von $\overline{x}$ zu $100[ml]$ entscheidet der Test aus Teil (a), dass der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt wird?

(c) Stellen Sie die Gütefunktion $G(\mu)$ des Tests auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, falls $\mu = 100.5[ml]$ beträgt?

(d) Geben Sie auf Basis der Stichprobenrealisation ein (symmetrisches) Konfidenzintervall für die mittlere Abfüllmenge zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.99$ an.

Aufgabe 20

Ein Hersteller von Waschmaschinen hat ein neues Modell entwickelt. Es werde angenommen, dass der Wasserverbrauch $Y[l]$ dieses neuen Modells als eine normalverteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz $\sigma^2 > 0$ betrachtet werden kann. Nach Auskunft des Herstellers beträgt der mittlere Wasserverbrauch μ dieses neuen Modells höchstens $\mu_0 = 40$ [l]. Mit einem Test zum Signifikanzniveau α wird $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$ anhand einer einfachen Stichprobe zu Y vom Umfang n geprüft.

(a) Welcher Test ist in der geschilderten Problemstellung geeignet?

(b) Leiten Sie zunächst allgemein die Gütefunktion $G(\mu)$ des Tests her und berechnen Sie dann speziell für $n = 16$, $\sigma^2 = 1.2^2$, $\alpha = 0.05$ den Wert der Gütefunktion an den Stellen $\mu = 39.7$ und $\mu = 41.2$.

(c) Wie groß ist in der Situation von Teil (b) die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art, wenn tatsächlich $\mu = 39.7$ gilt, und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn $\mu = 41.2$ gilt?

(d) Führen Sie den in Teil (b) festgelegten Test auf Basis der Stichprobenrealisation

$$\overline{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i = 40.11 \text{ [l]}$$

aus der Ziehung einer einfachen Stichprobe vom Umfang 16 durch. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

Aufgabe 21

Für den Erwartungswert μ einer normalverteilten Grundgesamtheit mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 1$ soll ein Gauß-Test von $H_0 : \mu \leq 0.10$ gegen $H_1 : \mu > 0.10$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ mit einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 100$ durchgeführt werden. Weiterhin sei $G(\mu)$ die zugehörige Gütefunktion.
Bewerten Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen:

		wahr	falsch
1.	Wenn für den Erwartungswert μ tatsächlich $\mu = 0.10$ gilt, dann verringert man die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art, indem man den Stichprobenumfang auf $n = 400$ erhöht.	☐	☐
2.	Wenn der Erwartungswert μ tatsächlich 0.11 beträgt, dann begeht man mit der Annahme der Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 0.10$ einen Fehler 2. Art.	☐	☐
3.	Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art ist für den obigen Test unabhängig vom Stichprobenumfang n.	☐	☐
4.	Für die Gütefunktion $G(\mu)$ gilt: $G(\mu) \leq \alpha$ für alle $\mu \leq 0.10$.	☐	☐
5.	Wird die Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ angenommen, dann wird sie auch auf einem Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ angenommen.	☐	☐
6.	Die Summe der Wahrscheinlichkeiten für den Fehler 1. Art und 2. Art ergibt immer 1.	☐	☐
7.	Das Signifikanzniveau stellt die maximale Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art dar.	☐	☐
8.	Für die Wahrscheinlichkeit $\beta(\mu)$ des Fehlers 2. Art gilt: $\beta(\mu) = 1 - G(\mu)$ für alle $\mu > 0.10$.	☐	☐
9.	$G(\mu)$ ist monoton fallend auf $\mathbb{R}$.	☐	☐